МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2010

Задания С3

Корянов А.Г. *г.Брянск*

Методы решения

1. Сведение неравенства к равносильной системе или совокупности систем
   а) иррациональные неравенства;
   б) показательные неравенства;
   в) логарифмические неравенства;
   г) неравенства, содержащие знак модуля
2. Расщепление неравенств
3. Метод перебора
4. Метод интервалов
5. Введение новой переменной
6. Метод рационализации
7. Использование свойств функции
   а) область определения функции;
   б) ограниченность функции;
   в) монотонность функции;

Метод сведения неравенства к равносильной системе или совокупности систем

<u>Некоторые стандартные схемы для решения иррациональных неравенств:</u>

- $\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$
- $\sqrt[2n]{f(x)} \ge \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge g(x), \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$
- $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g^2(x) \\ f(x) \ge 0 \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$
- $\sqrt[2n]{f(x)} \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le g^2(x) \\ f(x) \ge 0 \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$
- $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g^2(x), \\ g(x) \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array} \right.$
- $\sqrt[2n]{f(x)} \ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge g^2(x), \\ g(x) \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array} \right.$
- $\sqrt[2n+1]{f(x)} \vee \sqrt[2n+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \vee g(x)$
- $\sqrt[2n+1]{f(x)} \vee g(x) \Leftrightarrow f(x) \vee g^{2n+1}(x)$,

где символ $\vee$ заменяет один из знаков: $>, <, \ge, \le$.

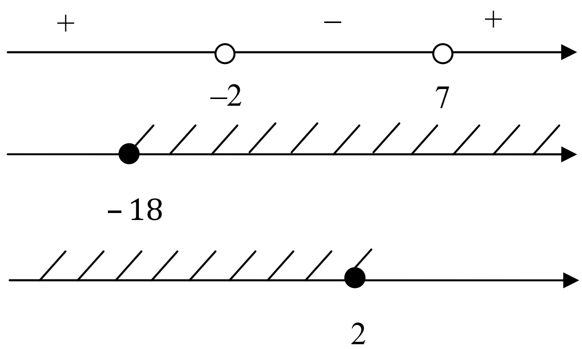
Пример 1. Решите неравенство

$$\sqrt{x+18} < 2 - x$$

Решение. Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x+18 < (2-x)^2 \\ x+18 \ge 0 \\ 2-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-7)(x+2) > 0 \\ x \ge -18 \\ x \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -18 \le x < -2$$



Ответ: $-18 \le x < -2$.

Пример 2. (2010) Решите неравенство

$$\sqrt{7-x} < \frac{\sqrt{x^3 - 6x^2 + 14x - 7}}{\sqrt{x-1}}.$$

Решение.

$$\sqrt{7-x} < \frac{\sqrt{x^3 - 6x^2 + 14x - 7}}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{7-x} \cdot \sqrt{x-1} < \sqrt{x^3 - 6x^2 + 14x - 7} \\ x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (7-x)(x-1) < x^3 - 6x^2 + 14x - 7 \\ 1 < x \le 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 5x^2 + 6x > 0 \\ 1 < x \le 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2)(x-3)>0 \\ 1<x\le 7 \end{cases}$$

Ответ: $1 < x < 2$, $3 < x \le 7$.

Предполагаемые критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Ответ неточен или из-за арифметической ошибки, или из-за того, что в него включены (отброшены) значения переменной, при которых подкоренные выражения обращаются в ноль.	2
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

<u>Некоторые стандартные схемы для решения показательных неравенств:</u>

- $(\varphi(x))^{f(x)} > (\varphi(x))^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)>g(x), \\ \varphi(x)>1, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)>f(x), \\ 0<\varphi(x)<1. \end{cases} \end{array}\right.$
- $(\varphi(x))^{f(x)} \ge (\varphi(x))^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)\ge g(x), \\ \varphi(x)>1, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)\ge f(x), \\ 0<\varphi(x)<1. \end{cases} \\ \varphi(x)=1 \end{array}\right.$

В частности:

- Если число $a>1,$ то
  $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$
- Если число $0<a<1,$ то
  $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

Пример 3. (2010) Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2\left(x^2-1\right)} > 1.$$

Решение. Так как функция $y=\left(\frac{1}{2}\right)^t$ убывает на $\mathbb{R}$, а функция $y=\log_2 t$ возрастает на промежутке $(0;+\infty)$, то имеем:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2\left(x^2-1\right)} > 1 \Leftrightarrow \log_2\left(x^2-1\right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1<1, \\ x^2-1>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{2}<x<-1 \\ 1<x<\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(-\sqrt{2};-1\right)\cup\left(1;\sqrt{2}\right)$.

<u>Некоторые стандартные схемы для решения логарифмических неравенств:</u>

- $\log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\varphi(x)} g(x) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)>g(x)>0, \\ \varphi(x)>1, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)>f(x)>0, \\ 0<\varphi(x)<1. \end{cases} \end{array}\right.$

В частности:

- Если число $a>1,$ то
  $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x) > 0$
- Если число $0<a<1,$ то
  $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow g(x) > f(x) > 0$

- $\log_{\varphi(x)} f(x) \ge \log_{\varphi(x)} g(x) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)\ge g(x)>0, \\ \varphi(x)>1, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)\ge f(x)>0, \\ 0<\varphi(x)<1. \end{cases} \end{array}\right.$

В частности:

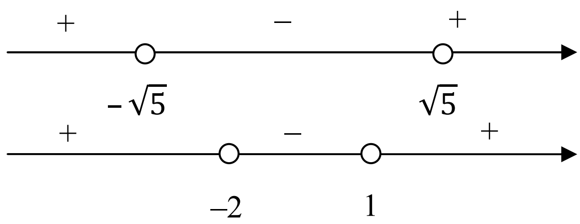
- Если число $a>1,$ то
  $\log_a f(x) \ge \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) \ge g(x) > 0$
- Если число $0<a<1,$ то
  $\log_a f(x) \ge \log_a g(x) \Leftrightarrow g(x) \ge f(x) > 0$

Пример 4. (2010) Решите неравенство

$$\log_{0,1}\left(x^2+x-2\right) > \log_{0,1}(x+3).$$

Решение. Так как функция $y = \log_{0,1} t$ убывает на промежутке $(0; +\infty)$, то данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 + x - 2 < x + 3 \\ x^2 + x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) < 0 \\ (x - 1)(x + 2) > 0 \end{cases}$$



Ответ: $\left(-\sqrt{5}; -2\right); \left(1; \sqrt{5}\right)$.

<u>Некоторые стандартные схемы для решения неравенств, содержащих знак модуля:</u>

- $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x), \end{cases}$
- $|f(x)| \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le g(x), \\ f(x) \ge -g(x), \end{cases}$
- $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{array}\right.$
- $|f(x)| \ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \ge g(x) \\ f(x) \le -g(x) \end{array}\right.$
- $|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) > g^2(x) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) > 0$
- $|f(x)| \ge |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) \ge g^2(x) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) \ge 0$

Пример 5. Решите неравенство

$$\left|x^7 + 4x^5 + x^2 + 2x - 3\right| < x^7 + 4x^5 - x^2 - 2x + 3$$

Решение. Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^7 + 4x^5 + x^2 + 2x - 3 < x^7 + 4x^5 - x^2 - 2x + 3 \\ x^7 + 4x^5 + x^2 + 2x - 3 > -(x^7 + 4x^5 - x^2 - 2x + 3) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 3 < 0 \\ x^5\left(x^2 + 4\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

Ответ: $0 < x < 1$.

Метод расщепления неравенств

- $f(x) \cdot g(x) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \le 0, \\ g(x) \le 0. \end{cases} \end{array}\right.$
- $f(x) \cdot g(x) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) \le 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \le 0, \\ g(x) \ge 0. \end{cases} \end{array}\right.$
- $\dfrac{f(x)}{g(x)} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \le 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right.$
- $\dfrac{f(x)}{g(x)} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \le 0, \\ g(x) > 0. \end{cases} \end{array}\right.$

Пример 6. (2010) Решите неравенство

$$\left(x + \frac{3}{x}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 1}{\sqrt{5 - x} - 1}\right)^2 \ge 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 1}{\sqrt{5 - x} - 1}\right)^2.$$

Решение. Приведем данное неравенство к следующему виду:

$$\left(x + \frac{3}{x} - 4\right)\left(\frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 1}{\sqrt{5 - x} - 1}\right)^2 \ge 0.$$

Последнее неравенство равносильно совокупности систем:

$$1) \begin{cases} x + \frac{3}{x} - 4 \ge 0 \\ \left(\frac{|x-3|-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-1)(x-3)}{x} \ge 0 \\ x \ne 4 \\ x \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x \le 1 \\ 3 \le x < 4 \\ 4 < x \le 5 \end{array}\right.$$

$$2) \begin{cases} x + \frac{3}{x} - 4 \le 0 \\ \left(\frac{|x-3|-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-1)(x-3)}{x} \ge 0 \\ |x - 3| = 1 \\ x \ne 4 \\ x \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\ x = 2.$

Ответ: $0 < x \le 1$, $x = 2$, $3 \le x < 4$, $4 < x \le 5$.

Перебор случаев

Пример 7. (2010) Решите неравенство

$$2^x + 2^{|x|} \ge 2\sqrt{2}.$$

Решение. Данное неравенство определено при всех значениях x. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $x \ge 0$, тогда неравенство примет следующий вид:

$2^x + 2^x \ge 2\sqrt{2} \ \Leftrightarrow\ 2^x \ge \sqrt{2} \ \Leftrightarrow\ x \ge \dfrac{1}{2}$ (в силу возрастания функции $y = 2^t$).

2. Если $x < 0$, то имеем:

$$2^x + \frac{1}{2^x} \ge 2\sqrt{2} \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} t^2 - 2\sqrt{2}\cdot t + 1 \ge 0 \\ 2^x = t \\ t > 0 \end{cases} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t \ge \sqrt{2}+1 \\ t \le \sqrt{2}-1 \end{array}\right. \\ 2^x = t \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x \ge \sqrt{2}+1 \\ 2^x \le \sqrt{2}-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge \log_2(\sqrt{2}+1) \\ x \le \log_2(\sqrt{2}-1) \end{array}\right.$$

Сравним два числа $\log_2(\sqrt{2}+1)$ и $\frac{1}{2}$.

Так как $\sqrt{2}+1 > \sqrt{2}$, то $\log_2(\sqrt{2}+1) > \log_2\sqrt{2}$ или $\log_2(\sqrt{2}+1) > \dfrac{1}{2}$.

Объединим решения, полученные в первом и втором случаях.

Ответ: $\left(-\infty; \log_2\left(\sqrt{2}-1\right)\right] \cup \left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Пример 8. (2010) Решите неравенство

$$\log_2\left(x^2-4\right) - 3\log_2\frac{x+2}{x-2} > 2.$$

Решение. Область определения данного неравенства определяется условием:

$(x-2)(x+2) > 0$. Отсюда получаем два промежутка: $(-\infty; -2)$ и $(2; +\infty)$.

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $x > 2$.

Тогда неравенство принимает следующий вид:

$\log_2(x-2) + \log_2(x+2) - 3\log_2(x+2) + 3\log_2(x-2) > 2;$

или $2\log_2(x-2) - \log_2(x+2) > 1$.

Отсюда $(x-2)^2 > 2(x+2)$, $x(x-6) > 0$. С учетом $x > 2$ получаем $x > 6$.

2. Пусть $x < -2$.

В этом случае неравенство принимает следующий вид:

$\log_2(2-x) + \log_2(-x-2) - 3\log_2(-x-2) + 3\log_2(2-x) > 2;$

или $2\log_2(2-x) - \log_2(-x-2) > 1$.

Отсюда $(2-x)^2 > 2(-x-2)$,

$x^2 - 2x + 8 > 0$. Так как уравнение $x^2 - 2x + 8 = 0$ не имеет корней и старший коэффициент больше нуля, то последнее неравенство выполняется при всех значениях x.

С учетом второго случая имеем $x < -2$.

Ответ: $x < -2$ или $x > 6$.

Метод интервалов

Пример 9. (2010) Решите неравенство

$$\left(3^{\frac{x-2}{2}} - 1\right)\sqrt{3^x - 10\sqrt{3^x} + 9} \ge 0.$$

Решение. Используем метод интервалов.

1). Рассмотрим функцию

$$f(x) = \left(3^{\frac{x-2}{2}} - 1\right)\sqrt{3^x - 10\sqrt{3^x} + 9}.$$

2) Найдем область определения функции $f(x)$.

Для этого решим неравенство $3^x - 10\sqrt{3^x} + 9 \ge 0$ (*), используя метод интервалов.

а) Пусть $g(x) = 3^x - 10\sqrt{3^x} + 9$.

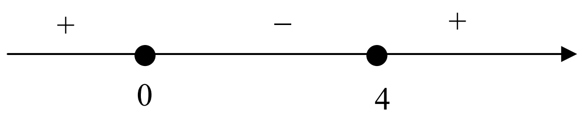
б) $D(g) = R$

в) $g(x) = 0$ $3^x - 10\sqrt{3^x} + 9 = 0$,

$t^2 - 10t + 9 = 0$, где $\sqrt{3^x} = t$. Имеем $t_1 = 1$ и $t_2 = 9$, тогда $x_1 = 0$ и $x_2 = 4$.

г) Промежутки знакопостоянства функции $g(x)$.

$g(1) < 0$. Используя свойство знакочередования значений функции $g(x)$, находим решения неравенства (*): $(-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$.



Следовательно, $D(f) = (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$.

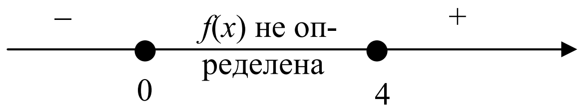
3) Нули функции $f(x)$.

$$\left(3^{\frac{x-2}{2}} - 1\right)\sqrt{3^x - 10\sqrt{3^x} + 9} = 0.$$

Получаем $x = 2$, $2 \notin D(f)$, $x = 0$ или $x = 4$.

4) Промежутки знакопостоянства функции $f(x)$.

$f(-1) < 0, f(5) > 0$. Отсюда $f(x) \ge 0$ при всех значениях $x \in \{0\} \cup [4; +\infty)$.



Ответ: $\{0\}\cup[4;+\infty)$.

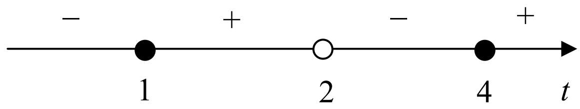
Метод введения новой переменной

Пример 10. (2010) Решите неравенство

$$\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}-2}\le 3.$$

Решение. Пусть $\sqrt{x}=t$, тогда получаем рациональное неравенство

$$t-\frac{2}{t-2}\le 3, \frac{(t-1)(t-4)}{t-2}\le 0.$$



Решая последнее неравенство методом интервалов, получаем:

$$\left[\begin{array}{l} t\le 1 \\ 2<t\le 4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}\le 1 \\ 2<\sqrt{x}\le 4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0\le x\le 1 \\ 4<x\le 16\end{array}\right.$$

Ответ: $[0;1]\cup(4;16]$.

Пример 11. (2010) Решите неравенство

$$\log_{x+3}\left(9-x^2\right)-\frac{1}{16}\log^2_{x+3}(x-3)^2\ge 2.$$

Решение. Преобразуем неравенство

$$\log_{x+3}\left((3-x)(3+x)\right)-\frac{1}{4}\log^2_{x+3}|x-3|\ge 2$$

Найдем, при каких значениях x левая часть неравенства имеет смысл:

$$\begin{cases} 9-x^2>0 \\ x+3>0 \\ x+3\ne 1 \\ x-3\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x>0 \\ x+3>0 \\ x+3\ne 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ x>-3 \\ x\ne -2\end{cases}$$

Получаем: $-3<x<-2$ или $-2<x<3$.
Значит, $|x-3|=3-x$ при всех допустимых значениях x. Поэтому

$$\log_{x+3}(3-x)+\log_{x+3}(3+x)-\frac{1}{4}\log^2_{x+3}(3-x)\ge 2$$

Сделаем замену $\log_{x+3}(3-x)=y$. Получаем $y-\frac{1}{4}y^2\ge 1$; $(y-2)^2\le 0$; $y=2$.
Таким образом, $\log_{x+3}(3-x)=2$, откуда $(x+3)^2=3-x$; $x^2+7x+6=0$. Корни уравнения: -6 и -1.
Условию $-3<x<-2$ или $-2<x<3$ удовлетворяет только $x=-1$.
Ответ: -1.

Предполагаемые критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	3
При верном решении допущена вычислительная ошибка, не влияющая на правильность последовательности рассуждений, и, возможно, приведшая к неверному ответу.	2
Получен ответ, содержащий наряду с правильным постороннее решение.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Метод рационализации (метод декомпозиции, метод замены множителей, метод замены функции, правило знаков)

● Метод рационализации заключается в замене сложного выражения $F(x)$ на более простое выражение $G(x)$, при которой неравенство $G(x)\vee 0$ равносильно неравенству $F(x)\vee 0$ в области определения выражения $F(x)$.

Выделим некоторые выражения F и соответствующие им рационализирующие выражения G, где f,g,h,p,q - выражения с переменной x ($h>0; h\ne 1; f>0; g>0$), a – фиксированное число ($a>0; a\ne 1$).

№	Выражение F	Выражение G
1 1а 1б	$\log_a f-\log_a g$ $\log_a f-1$ $\log_a f$	$(a-1)(f-g)$ $(a-1)(f-a)$ $(a-1)(f-1)$
2 2а 2б	$\log_h f-\log_h g$ $\log_h f-1$ $\log_h f$	$(h-1)(f-g)$ $(h-1)(f-h)$ $(h-1)(f-1)$
3	$\log_f h-\log_g h$ $(g\ne 1,\ f\ne 1)$	$(f-1)(g-1)\times$ $\times(h-1)(g-f)$
4 4а	$h^f-h^g\quad(h>0)$ h^f-1	$(h-1)(f-g)$ $(h-1)f$
5	f^h-g^h $(f>0; g>0)$	$(f-g)h$
6	$\lvert f\rvert-\lvert g\rvert$	$(f-g)(f+g)$

<u>Некоторые следствия</u> (с учетом области определения неравенства):

- $\log_h f \cdot \log_p q \vee 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (h-1)(f-1)(p-1)(q-1) \vee 0$

- $\log_h f + \log_h g \vee 0 \Leftrightarrow (fg-1)(h-1) \vee 0$

- $\sqrt{f} - \sqrt{g} \vee 0 \Leftrightarrow f - g \vee 0$

- $\frac{h^f - h^g}{h^p - h^q} \vee 0 \Leftrightarrow \frac{f-g}{p-q} \vee 0$

Пример 12. (2010) Решите неравенство

$$\log_{2x+3} x^2 < 1.$$

Решение. Запишем неравенство в виде $\log_{2x+3} x^2 - 1 < 0$ и заменим его равносильной системой, используя метод рационализации

$$\begin{cases} (2x+2)(x^2-2x-3) < 0 \\ 2x+3 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x+1)(x-3) < 0 \\ x > -1{,}5 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Ответ: $(-1{,}5;-1) \cup (-1;0) \cup (0;3)$.

Пример 13. (2010) Решите неравенство

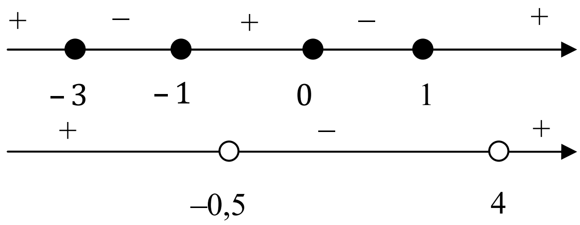
$$\log_{|x+2|}\left(4+7x-2x^2\right) \leq 2.$$

Решение. Запишем неравенство в виде $\log_{|x+2|}\left(4+7x-2x^2\right) - \log_{|x+2|}(x+2)^2 \leq 0$ и заменим его равносильной системой, используя метод рационализации

$$\begin{cases} (|x+2|-1)(4+7x-2x^2-x^2-4x-4) \leq 0 \\ 4+7x-2x^2 > 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ((x+2)^2-1)(-3x^2+3x) \leq 0 \\ (x+0{,}5)(x-4) < 0 \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1)(x+3)(x-1) \geq 0 \\ (x+0{,}5)(x-4) < 0 \\ x \neq -2 \end{cases}$$



Ответ: $(-0{,}5;0] \cup [1;4)$.

Пример 14. (2010) Решите неравенство

$$\log_{\frac{x}{3}}\left(\log_x \sqrt{3-x}\right) \geq 0.$$

Решение. Заменим данное неравенство равносильной системой, используя метод рационализации

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{3}-1\right)\left(\log_x \sqrt{3-x} - 1\right) \geq 0 \\ \log_x \sqrt{3-x} > 0 \\ 3-x > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 3 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x-1)\left(\sqrt{3-x} - x\right) \geq 0 \\ (x-1)\left(\sqrt{3-x}-1\right) > 0 \\ x < 3 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(3-x-x^2) \leq 0 \\ (x-1)(3-x-1) > 0 \\ x < 3 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{\sqrt{13}+1}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{13}-1}{2}\right) \geq 0 \\ 1 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{13}-1}{2} \leq x < 2.$$

Ответ: $\left[\frac{\sqrt{13}-1}{2};2\right)$.

Пример 15. (2010) Решите неравенство

$$\log_{12x^2-41x+35}(3-x) \geq \log_{2x^2-5x+3}(3-x).$$

Решение. Запишем неравенство в виде

$$\log_{12x^2-41x+35}(3-x)-\log_{2x^2-5x+3}(3-x)\geq 0$$
и заменим его равносильной системой, используя метод рационализации

$$\begin{cases}(12x^2-41x+34)(2x^2-5x+2)(2-x)(-10x^2+36x-32)\geq 0\\ 12x^2-41x+35>0\\ 2x^2-5x+3>0\\ 12x^2-41x+34\neq 0\\ 2x^2-5x+2\neq 0\\ 3-x>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-2)^4\left(x-\frac{8}{5}\right)\left(x-\frac{17}{12}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\geq 0\\ \left(x-\frac{5}{3}\right)\left(x-\frac{7}{4}\right)>0\\ (x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)>0\\ \left(x-\frac{17}{12}\right)(x-2)\neq 0\\ (x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)\neq 0\\ x<3\end{cases}$$

Для решения первых трех неравенств системы используем метод интервалов.
Самостоятельно рассмотрите рисунки и выберите общую часть для решения системы.

Ответ: $\left(\frac{1}{2};1\right)\cup\left[\frac{8}{5};\frac{5}{3}\right)\cup\left(\frac{7}{4};2\right)\cup(2;3)$.

Использование свойств функции

а) области определения функции

Пример 16. Решите неравенство

$$(\sqrt{x^2-6x+5}+1)\log_5\frac{x}{5}+\frac{1}{x}(\sqrt{12x-2x^2-10}+1)>0$$

Решение. Область определения неравенства задается условиями:

$$\begin{cases}x^2-6x+5\geq 0,\\ 12x-2x^2-10\geq 0\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=5\end{array}\right.$$

При $x=1$ получаем, что исходное неравенство обращается в неверное неравенство $0>0$.

При $x=5$ имеем верное неравенство $\frac{1}{5}>0$.

Ответ: 5.

б) ограниченность функции

Пример 17. Решите неравенство

$$\log_5 x\leq\sqrt{1-x^4}$$

Решение. Область определения неравенства задается условиями:

$$\begin{cases}x>0,\\ 1-x^4\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow 0<x\leq 1.$$

Для всех x из полученного множества имеем $\log_5 x\leq 0$, а $\sqrt{1-x^4}\geq 0$. Следовательно, решением этого неравенства является промежуток $(0;1]$.

Ответ: $(0;1]$.

в) монотонность функции

Пример 18. Решите неравенство

$$\sqrt[6]{x}+2x^3+\log_3(x+2)-\sqrt{1-x}<4$$

Решение. Область определения данного неравенства есть промежуток $[0;1]$. Функция
$$y=\sqrt[6]{x}+2x^3+\log_3(x+2)-\sqrt{1-x}$$
возрастает на этом промежутке как сумма возрастающих функций. Так как $f(1)=4$, то все значения x из множества $[0;1)$ удовлетворяют исходному неравенству.

Ответ: $[0;1)$.

Упражнения

1. (2010) Решите неравенство
$$\log_{|x+2|}\left(4+7x-2x^2\right)\leq 2.$$
Ответ: $(-0{,}5;0]\cup[1;4)$.

2. (2010) Решите неравенство
$$\log_{\frac{3x-1}{x+2}}\left(2x^2+x-1\right)\leq\log_{\frac{3x-1}{x+2}}\left(11x-6-3x^2\right).$$
Ответ: $\{1\}\cup(1{,}5;3)$.

3. (2010) Решите неравенство
$$\frac{4^{x^2+3x-2}-(0{,}5)^{2x^2+2x-1}}{5^x-1}\leq 0.$$
Ответ: $\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right]\cup\left(0;\frac{1}{2}\right]$.

4. (2010) Решите неравенство

$$\frac{\log_{0,2}\frac{1}{2x-1}+\log_5(2-x)}{\log_5(2x-1)+\log_{0,2}\frac{1}{3-2x}}\ge 0.$$

Ответ: $(0{,}5;1)$.

5. (2010) Решите неравенство

$$\log_{2x+3}x^2<1.$$

Ответ: $(-1{,}5;-1)\cup(-1;0)\cup(0;3)$.

6. (2010) Решите неравенство

$$\log_x\left(\log_9\left(3^x-9\right)\right)<1.$$

Ответ: $(\log_3 10;+\infty)$.

7. (2010) Решите неравенство

$$\frac{\log_2\left(3\cdot 2^{x-1}-1\right)}{x}\ge 1.$$

Ответ: $\left(\log_2\frac{2}{3};0\right)$; $[1;+\infty)$.

8. (2010) Решите неравенство

$$\log_5(x+2)+\log_5(1-x)\le\log_5\left((1-x)\left(x^2-8x-8\right)\right).$$

Ответ: $-2<x\le -1$.

9. (2010) Решите неравенство

$$\log_{\frac{x}{3}}\left(\log_x\sqrt{3-x}\right)\ge 0.$$

Ответ: $\left[\frac{\sqrt{13}-1}{2};2\right)$.

10. (2010) Решите неравенство

$$\log_{x+1}\left(19+18x-x^2\right)-\frac{1}{16}\log^2_{x+1}(x-19)^2\ge 2.$$

Ответ: 3.

11. (2010) Решите неравенство

$$\frac{\log^2_{2x-3}\frac{1}{3x-5}+\log_{2x-3}\left(9x^2-30x+25\right)+7}{2\log_{2x-3}\left(6x^2-19x+15\right)-1}\le 3.$$

Ответ: $\frac{7}{4}$.

12. (2010) Решите неравенство

$$\frac{\log_2(3x+2)}{\log_3(2x+3)}\le 0.$$

Ответ: $\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right]$.

13. (2010) Решите неравенство

$$\frac{\log_2\left(2x^2-13x+20\right)-1}{\log_3(x+7)}\le 0.$$

Ответ: $(-7;6)\cup[2;2{,}5)\cup(4;4{,}5]$.

14. (2010) Решите неравенство

$$\log_{0,1}\left(x^2+x-2\right)>\log_{0,1}(x+3).$$

Ответ: $\left(-\sqrt{5};-2\right)$; $\left(1;\sqrt{5}\right)$.

15. (2010) Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2\left(x^2-1\right)}>1.$$

Ответ: $\left(-\sqrt{2};-1\right)$; $\left(1;\sqrt{2}\right)$.

16. (2010) Решите неравенство

$$\frac{x^2-4}{\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-1\right)}<0.$$

Ответ: $(-\infty;-2)$; $\left(-\sqrt{2};-1\right)$; $\left(1;\sqrt{2}\right)\cup(2;+\infty)$.

17. (2010) Решите неравенство

$$\log_3\left((x+2)(x+4)\right)+\log_{\frac{1}{3}}(x+2)<\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}7.$$

Ответ: $-2<x<3$.

18. (2010) Решите неравенство

$$\log_2\frac{3x-2}{x-1}+3\log_8\frac{(x-1)^3}{3x-2}<1.$$

Ответ: $1-\sqrt{2}<x<\frac{2}{3}$, $1<x<1+\sqrt{2}$.

19. (2010) Решите неравенство

$$\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\le 0.$$

Ответ: $(-2;-1]\cup(1;2)$.

20. (2010) Решите неравенство

$$\log_{x+2}\left(36+16x-x^2\right)-\frac{1}{16}\log^2_{x+2}(x-18)^2\ge 2.$$

Ответ: 2.

21. (2010) Решите неравенство

$$\frac{\log_3 x}{\log_3(3x+2)}<1.$$

Ответ: $(0;\infty)$.

22. (2010) Решите неравенство

$$\frac{(\log_3(10x+3))\cdot(\log_3(3x+10))}{(\log_3 10x)\cdot\log_3 x}\ge 0.$$

Ответ: $(0;0{,}1)\cup(1;\infty)$.

23. (2010) Решите неравенство

$$\log^2_{x+2}(x-18)^2+32\le 16\log_{x+2}\left(36+16x-x^2\right).$$

Ответ: 2.

24. (2010) Решите неравенство

$$\log_{12x^2-41x+35}(3-x)\ge\log_{2x^2-5x+3}(3-x).$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2};1\right)\cup\left[\frac{8}{5};\frac{5}{3}\right)\cup\left(\frac{7}{4};2\right)\cup(2;3)$.

25. (2010) Решите неравенство

$$\log_{x+3}\left(9-x^2\right)-\frac{1}{16}\log^2_{x+3}(x-3)^2\ge 2.$$

Ответ: –1.

26. (2010) Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{2x^2-7x+6}}\left(\frac{x}{3}\right)>0.$$

Ответ: $1 < x < \frac{3}{2}$, $2 < x < \frac{5}{2}$, $x > 3$.

27. (2010) Решите неравенство

$$x^{\lg x} > 10x^{-\lg x} + 3.$$

Ответ: $0 < x < 10^{-\sqrt{\lg 5}}$, $10^{\sqrt{\lg 5}} < x$.

28. (2010) Решите неравенство

$$(0{,}3)^{2x^2-3x+6} < 0{,}00243.$$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

29. (2010) Решите неравенство

$$8^{\sqrt{8^x}} > 4096.$$

Ответ: $\left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$.

30. (2010) Решите неравенство

$$\log_{0,5}\left(x^2 - 5x + 6\right) > -1.$$

Ответ: $(1; 2) \cup (3; 4)$.

31. (2010) Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2-3x}{x}\right) \geq -1.$$

Ответ: $\left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

32. (2010) Решите неравенство

$$2^x + 2^{|x|} \geq 2\sqrt{2}.$$

Ответ: $\left(-\infty; \log_2\left(\sqrt{2}-1\right)\right] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

33. (2010) Решите неравенство

$$8 \cdot \frac{3^{x-2}}{3^x - 2^x} > 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x.$$

Ответ: $\left(0; \log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$.

34. (2010) Решите неравенство

$$3^{72} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}} > 1$$

Ответ: $[0; 64)$.

35. (2010) Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+1) > \log_3(x-2).$$

Ответ: $\left(2; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$.

36. (2010) Решите неравенство

$$\left(\frac{x}{10}\right)^{\lg x - 2} < 100.$$

Ответ: $(1; 1000)$.

37. (2010) Решите неравенство

$$\log_{|x|}\left(\sqrt{9-x^2} - x - 1\right) \geq 1.$$

Ответ: $\left[-\sqrt{8}; -1\right) \cup \left[\frac{-2+\sqrt{44}}{5}; +\infty\right)$.

38. (2010) Решите неравенство

$$\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x} - 2} \leq 3.$$

Ответ: $[0;1] \cup (4; 16]$.

39. (2010) Решите неравенство

$$\frac{2}{\sqrt{x} - 3} + 2 \geq \sqrt{x}.$$

Ответ: $[0;1] \cup (9; 16]$.

40. (2010) Решите неравенство

$$\sqrt{4-x^2} + \frac{\sqrt{x^2}}{x} \geq 0.$$

Ответ: $\left[-\sqrt{3}; 0\right) \cup (0; 2]$.

41. (2010) Решите неравенство

$$\sqrt{4-x^2} \geq \frac{\sqrt{x^2}}{x}.$$

Ответ: $[-2; 0) \cup \left(0; \sqrt{3}\right]$.

42. (2010) Решите уравнение

$$\sqrt{x + 4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x - 4\sqrt{x-4}} = 4.$$

Ответ: $[4; 8]$.

43. (2010) Решите уравнение

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 2.$$

Ответ: $x \geq 2$.

44. (2010) Решите неравенство

$$\log_2\left(x^2 - 4\right) - 3\log_2 \frac{x+2}{x-2} > 2.$$

Ответ: $x < -2$ или $x > 6$.

45. (2010) Решите неравенство

$$\frac{\log_2 x - 5}{1 - 2\log_2 x} \geq 2\log_2 x.$$

Ответ: $0 < x \leq \frac{1}{2}$, $\sqrt{2} < x \leq 2\sqrt[4]{2}$.

46. (2010) Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{1-x^3} - 1}{x+1} \leq x.$$

Ответ: $[-2; -1)$, $[0; 1]$.

47. (2010) Решите неравенство

$$\sqrt{7-x} < \frac{\sqrt{x^3 - 6x^2 + 14x - 7}}{\sqrt{x-1}}.$$

Ответ: $1 < x < 2$, $3 < x \leq 7$.

48. (2010) Решите неравенство

$$\sqrt{5-x} < \frac{\sqrt{x^3 - 7x^2 + 14x - 5}}{\sqrt{x-1}}.$$

Ответ: $1 < x < 2$, $4 < x \leq 5$.

49. (2010) Решите неравенство

$$\log_x(7-x)<\log_x\left(x^3-6x^2+14x-7\right)-\log_x(x-1).$$
Ответ: $1<x<2,\ 3<x<7$.

50. (2010) Решите неравенство
$$\log_x(5-x)<\log_x\left(x^3-7x^2+14x-5\right)-\log_x(x-1).$$
Ответ: $1<x<2,\ 4<x<5$.

51. (2010) Решите неравенство
$$\left(3^{\frac{x-2}{2}}-1\right)\sqrt{3^x-10\sqrt{3^x}+9}\geq 0.$$
Ответ: $\{0\}\cup[4;+\infty)$.

52. (2010) Решите неравенство
$$\left(2^{\frac{x-4}{2}}-1\right)\sqrt{2^x-10\sqrt{2^x}+16}\geq 0.$$
Ответ: $\{2\}\cup[6;+\infty)$.

53. (2010) Решите неравенство
$$\left(x+\frac{3}{x}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2\geq 4\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2.$$
Ответ: $0<x\leq 1,\ x=2,\ 3\leq x<4,\ 4<x\leq 5$.

54. (2010) Решите неравенство
$$\left(x+\frac{4}{x}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-8x+16}-1}{\sqrt{6-x}-1}\right)^2\geq 5\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-8x+16}-1}{\sqrt{6-x}-1}\right)^2$$
Ответ: $0<x\leq 1,\ x=3,\ 4\leq x<5,\ 5<x\leq 6$.

55. (2010) Решите неравенство
$$\left(x+\frac{3}{x}\right)\cdot\left(\log_{(5-x)}\left(x^2-6x+9\right)\right)^2\geq$$
$$\geq 4\cdot\left(\log_{(5-x)}\left(x^2-6x+9\right)\right)^2.$$
Ответ: $0<x\leq 1,\ x=2,\ 3<x<4,\ 4<x<5$.

56. (2010) Решите неравенство
$$\left(x+\frac{4}{x}\right)\cdot\left(\log_{(6-x)}\left(x^2-8x+16\right)\right)^2\geq$$
$$\geq 5\cdot\left(\log_{(6-x)}\left(x^2-8x+16\right)\right)^2.$$
Ответ: $0<x\leq 1,\ x=3,\ 4<x<5,\ 5<x<6$.

57. Решите неравенство
$$\log_{6x^2-5x+1}2>\log_{\sqrt{6x^2-5x+1}}2$$
Ответ: $0<x<\frac{1}{3}$ или $\frac{1}{2}<x<\frac{5}{6}$.

58. Решите неравенство
$$\frac{1}{6x^2-5x}\geq\frac{1}{\sqrt{6x^2-5x+1}-1}$$
Ответ: $0<x\leq\frac{1}{3}$ или $\frac{1}{2}\leq x<\frac{5}{6}$.

59. Решите неравенство
$$\log_{\frac{1}{2}}x+\log_3 x>1$$
Ответ: $\left(0;10^{\frac{lg0,5\cdot lg3}{lg1,5}}\right)$ или $\left(0;\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{3}{2}}3}\right)$.

60. Решите неравенство
$$\log_{\frac{1}{x}}\left(\frac{5}{2}x-1\right)\geq -2$$
Ответ: $\left[\frac{1}{2};1\right),\ [2;+\infty)$.

61. Решите неравенство
$$\log_{\frac{x}{6}}\left(\log_x\sqrt{6-x}\right)>0.$$
Ответ: (2;5)

62. Решите неравенство
$$\log_{x+4}(5x+20)\leq\log_{x+4}(x+4)^2$$
Ответ: $(-4;-3)\cup[1;+\infty)$.

Источники

1. Дорофеев Г.В. Обобщение метода интервалов // Математика в школе, 1969, №3.

2. ЕГЭ. Математика. Тематическая тетрадь. 11 класс / И. В. Ященко, С. А. Шестаков, П. И. Захаров. – М.: МЦНМО, Издательство «Экзамен», 2010.

3. Единый государственный экзамен 2010. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2010.

4. ЕГЭ 2010. Математика: Сборник тренировочных работ / Высоцкий И.Р., Захаров П.И., Панфёров В.С., Семёнов А.В., Сергеев И.Н., Смирнов В.А., Шестаков С.А., Ященко И.В. – М.: МЦНМО, 2009.

5. ЕГЭ 2010. Математика. Типовые тестовые задания /под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2010.

6. Панферов В. С., Сергеев И. Н. Отличник ЕГЭ. Математика. Решение сложных задач; ФИПИ – М.: Ителлект-Центр, 2010.

7. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ 2010: Математика /авт.-сост. И. Р. Высоцкий, Д. Д. Гущин, П. И. Захаров и др.; под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М.: АСТ: Астрель, 2009. – (Федеральный институт педагогических измерений).

8. Ященко И. В., Шестаков С. А., Захаров П. И. Подготовка к ЕГЭ по математике в 2010 году. Методические указания. – М.: МЦНМО, 2009.

9. Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения. 10-11 классы: Учебно-метод. пособие / С. Н. Олехник, М. К. Потапов, П. И. Пасиченко. – М.: Дрофа, 2001.

10. www.mathege.ru - Математика ЕГЭ 2010 (открытый банк заданий)

11. www.alexlarin.narod.ru - сайт по оказанию информационной поддержки студентам и абитуриентам при подготовке к ЕГЭ, поступлению в ВУЗы и изучении различных разделов высшей математики.

Замеченные опечатки в С1

● В задании № 15 вместо ответа $(-4;4)$ должно быть $(-4;-4)$.