МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2010
Задания С1 и С2

Корянов А.Г. *г.Брянск*

Задания С1

● (Д – 2010) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+3x-\sqrt{x^2+3x-1}=7 \\ 2\sqrt{2}\sin y = x \end{cases}$$

Ответ: $x=2,\quad y=(-1)^n\cdot\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z.$

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5\cdot 5^{tgy}+4=5^{-tgy} \\ \sqrt{x-5}+4\cos y=0 \end{cases}$$

Ответ: $\left(13;\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n\right),\ n\in Z.$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^y+2\sin x=0 \\ tgx+1=\dfrac{1}{\cos^2 x} \end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{5\pi}{4}+2\pi n;0,5\right),\ n\in Z.$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4^{\sin y}-5\cdot 2^{\sin y}+4=0 \\ \sqrt{x}+5\cos y+1=0 \end{cases}$$

Ответ: $(16;\pi+2\pi n),\ n\in Z.$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4\cos^2 x-12\cos x+5=0 \\ \sqrt{y^2-4y+16}+4\sin x=0 \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n;2\right),\ n\in Z.$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{y+\cos^2 x-2}=\cos x \\ y\sin^2 x-\sin x-1=0 \end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;2\right),\ n\in Z;$

$\left(-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k;2\right),\ k\in Z.$

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4^y-10\cdot 2^y+16=0 \\ \cos x=\sqrt{y-2} \end{cases}$$

Ответ: $(2\pi n;3),\ n\in Z.$

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 16^{\cos x}-10\cdot 4^{\cos x}+16=0 \\ \sqrt{y}+2\sin x=0 \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n;3\right),\ n\in Z.$

8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3^{y+1}=2\cos x \\ 3^{-y}=4\cos x+1 \end{cases}$$

Ответ: $\left(\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n;-1\right),\ n\in Z.$

9. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x=y-3 \\ \cos x=y-2 \end{cases}$$

Ответ: $(2\pi n;3),\ n\in Z;\ \left(-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;2\right),\ k\in Z.$

10. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin y=x-6 \\ \cos y=x-7 \end{cases}$$

Ответ: $(6;\pi+2\pi n),\ n\in Z;\ \left(7;\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right),\ k\in Z.$

11. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x=\sin y \\ 2^{-x}=2\sin y+1 \end{cases}$$

Ответ: $\left(-1;(-1)^n\cdot\dfrac{\pi}{6}+\pi n\right),\ n\in Z.$

12. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 81^{\sin y}-30\cdot 9^{\sin y}+81=0 \\ \sqrt{x}+2\cos y=0 \end{cases}$$

Ответ: $\left(3;\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n\right),\ n\in Z.$

13. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2\sin^2 y+3\sin y-2=0 \\ \sqrt{x^2-x}+4\cos y=0 \end{cases}$$

Ответ: $\left(-3;\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n\right),\ n\in Z;$

$\left(4;\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k\right),\ k\in Z.$

14. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3\sin x=\cos 2x+1 \\ \sqrt{y^2+6y}+6\cos x=0 \end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n;3\right),\ n\in Z;$

$\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi k;-9\right),\ k\in Z;$

15. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{2x^2-4xy+4y^2-16}=x-2y\\ y^2-2xy+16=0\end{cases}$$

Ответ: $(-4;4)$.

16. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{2y^2-2xy+x^2-25}=y-x\\ x^2-4xy+100=0\end{cases}$$

Ответ: $(-10;-5)$.

17. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}2\sin^2 x-7\sin x+3=0\\ 6\sin x+5y=13\end{cases}$$

Ответ: $\left((-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n;2\right),\ n\in Z.$

18. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}2\cos^2 y+11\cos y+5=0\\ 5\cos x-2\cos y+4=0\end{cases}$$

Ответ: $\left(\pi+2\pi n;\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right),\ n\in Z,\ k\in Z.$

19. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}2\,tgx+5y=12\\ 2\,tgx+3y=8\end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;2\right),\ n\in Z$.

20. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3\,tgx+4\cos y=5\\ 3\,tgx+8\cos y=7\end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\right),\ n\in Z,\ k\in Z.$

21. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3^y+2\cos x=0\\ 2\sin^2 x-3\sin x-2=0\end{cases}$$

Ответ: $\left(-\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\frac{1}{2}\right),\ n\in Z;$

22. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3^x+2\sin y=0\\ 4\cos^2 y-4\cos y-3=0\end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2};-\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right),\ n\in Z;$

23. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x^2=8\sin y+1\\ x+1=2\sin y\end{cases}$$

Ответ: $(-1;\pi n),\ n\in Z;$

24. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}y^2=4\cos x+1\\ y+1=2\cos x\end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;-1\right),\ n\in Z.$

25. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\cos y\sqrt{\sin x}=0\\ 2\sin^2 x=2\cos^2 y+1\end{cases}$$

Ответ: $\left((-1)^n\cdot\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi k\right),\ n\in Z, k\in Z.$

26. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sin y\sqrt{\cos x}=0\\ 2\sin^2 x+2\cos^2 y=3\end{cases}$$

Ответ: $\left(\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n;\pi k\right),\ n\in Z,\ k\in Z;$

$\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\pm\frac{\pi}{4}+\pi k\right),\ n\in Z,\ k\in Z.$

27. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}4\cos^2 x-4\cos x-3=0\\ \sqrt{y^2-y-3}+2\sin x=0\end{cases}$$

Ответ: $\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi n;3\right),\ n\in Z;$

$\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi k;-2\right),\ k\in Z.$

28. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\cos 2y=\cos y\\ \sqrt{x^2-2x}=2\sin y\end{cases}$$

Ответ: $(0;2\pi n)$; $(2;2\pi n)$;

$\left(3;\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)$; $\left(-1;\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right),\ n\in Z.$

29. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x\,tgy=9\\ x\,ctgy=3\end{cases}$$

Ответ: $\left(3\sqrt{3};\frac{\pi}{3}+\pi n\right),\ n\in Z;$

$\left(-3\sqrt{3};-\frac{\pi}{3}+\pi k\right),\ k\in Z.$

30. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}y\,tgx=-2\\ y\,ctgx=-6\end{cases}$$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi n;2\sqrt{3}\right),\ n\in Z;$

$\left(\frac{\pi}{6}+\pi k;-2\sqrt{3}\right),\ k\in Z.$

31. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{\sin 2x-\cos x}{\sqrt{y+1}}=0\\ y=4\sin x-3\end{cases}$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z,\ y=1.$

32. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+\cos x}{\sqrt{y-1}}=0\\ y=4\sin x+3\end{cases}$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z,\ y=7.$

33. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{2\sin^2 x-3\sin x+1}{\sqrt{y}}=0\\ y-\cos x=0\end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения системы следует $2\sin^2 x-3\sin x+1=0$ и $y>0$. Пусть $\sin x=t$, где $-1\le t\le 1$. Из уравнения $2t^2-3t+1=0$ получаем корни $t_1=1,\ t_2=\frac{1}{2},$ которые удовлетворяют условию $-1\le t\le 1$.

а) Если $\sin x=1$, то $\cos x=0$ и из второго уравнения системы имеем $y=0$. Это значение не удовлетворяет условию $y>0$.

б) Пусть $\sin x=\frac{1}{2},$ тогда из тождества $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ получаем $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Отсюда $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ или $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (не удовлетворяет условию $y>0$).

Из уравнения $\sin x=\frac{1}{2}$ имеем $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z.$

Таким образом, исходная система имеет решения $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z,\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Ответ: $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z,\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за того, что в решении не учтено, что знаменатель дроби существует и отличен от нуля.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

34. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{2\sin^2 x+3\sin x+1}{\sqrt{-y}}=0\\ y=-\cos x\end{cases}$$

Ответ: $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z,\ y=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$

35. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{16^{\sin x}-6\cdot 4^{\sin x}+8}{\log_2(1-2y)}=0\\ y=\cos x\end{cases}$$

Ответ: $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in Z,\ y=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$

36. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{81^{\cos x}-12\cdot 9^{\cos x}+27}{\log_7(1+2y)}=0\\ y=\sin x\end{cases}$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z,\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

37. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sin x-\sin y=1\\ \sin^2 x+\cos^2 y=1\end{cases}$$

Ответ:

$\left((-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n;(-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k\right),\ n\in Z, k\in Z.$

38. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\left(2x^2-5x-3\right)\sqrt{\cos y}=0\\ \sin y=x\end{cases}$$

Ответ: $\left((-1)^n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n\in Z;$

$\left(-\frac{1}{2};-\frac{\pi}{6}+2\pi k\right),\ k\in Z.$

39. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \cos(x+y) = -\dfrac{1}{2} \\ \sin x + \sin y = \sqrt{3} \end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{3}+2\pi n; \dfrac{\pi}{3}+2\pi k\right)$;

$\left(\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n; \dfrac{2\pi}{3}+2\pi k\right)$, $n \in Z$, $k \in Z$.

40. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ |x-y| = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим два случая, связанные с раскрытием модуля.

1. Если $x - y = \dfrac{2\pi}{3}$, то $y = x - \dfrac{2\pi}{3}$. Первое уравнение системы примет вид

$\sin x + \sin\left(x - \dfrac{2\pi}{3}\right) = 1;$

$\sin x + \sin x \cdot \cos\dfrac{2\pi}{3} - \cos x \cdot \sin\dfrac{2\pi}{3} = 1;$

$\sin x - \dfrac{1}{2}\sin x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 1;$

$\dfrac{1}{2}\sin x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 1;$ $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 1;$

$x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$ Отсюда

$y = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$

2. Если $x - y = -\dfrac{2\pi}{3}$, то $y = x + \dfrac{2\pi}{3}$. Первое уравнение системы примет вид

$\sin x + \sin\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) = 1;$

$\sin x + \sin x \cdot \cos\dfrac{2\pi}{3} + \cos x \cdot \sin\dfrac{2\pi}{3} = 1;$

$\sin x - \dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 1;$

$\dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 1;$ $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1;$

$x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z.$ Отсюда

$y = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z.$

Ответ: $\left(\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n; \dfrac{\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n \in Z$;

$\left(\dfrac{\pi}{6}+2\pi k; \dfrac{5\pi}{6}+2\pi k\right)$, $k \in Z$.

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Получен ответ, но решение не верно из-за ошибки в формулах или значениях тригонометрических функций, из-за неверной записи ответа.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

41. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x = \sin 2y \\ \cos x = \sin y \\ 0 \le x \le \pi \\ 0 \le y \le \pi \end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{6}\right)$; $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

42. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{2\pi}{3} \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = 2 \end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n; \dfrac{\pi}{6}-\pi n\right)$, $n \in Z$.

Задания С 2

РАССТОЯНИЯ И УГЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

Методы решения задач

1. Поэтапно-вычислительный метод
2. Координатный метод
3. Координатно-векторный метод
4. Векторный метод
5. Метод объемов
6. Метод ключевых задач

Ключевые задачи

1. Координаты точки $M(x; y; z)$, делящей отрезок M_1M_2 между точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и

$M_2(x_2;y_2;z_2)$ в отношении $M_1M : MM_2 = \lambda$, определяются формулами $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$,
$y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$, $z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$.

2. Найти угол между диагоналями смежных граней куба.

3. Найти угол между диагональю куба и скрещивающейся с ней диагональю грани.

4. Найти угол между диагональю куба и плоскостью, проведенной через концы трех ребер куба, выходящих из той же вершины, что и диагональ.

5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагональ BD_1 перпендикулярна плоскостям AB_1C и A_1DC_1 и делится ими на три равные части.

6. Отрезки, соединяющие середины противолежащих ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

7. В правильной треугольной пирамиде скрещивающиеся ребра перпендикулярны.

8. Отрезок, соединяющий середины скрещивающихся ребер правильного тетраэдра, является их общим перпендикуляром и имеет длину $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, где a – длина ребра.

9. Любое сечение треугольной пирамиды плоскостью, параллельной ее скрещивающимся ребрам, является параллелограммом.

10. Любое сечение правильной треугольной пирамиды плоскостью, параллельной ее скрещивающимся ребрам, есть прямоугольник.

1. Расстояние между двумя точками

Расстояние между точками A и B можно вычислить:

1) как длину отрезка AB, если отрезок AB удается включить в некоторый треугольник в качестве одной из его сторон;

2) по формуле $\rho(A;B) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$, где $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$;

3) по формуле $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$.

Пример 1. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на диагоналях граней AD_1 и D_1B_1 взяты точки E и F так, что $D_1E = \dfrac{1}{3}AD_1$, $D_1F = \dfrac{2}{3}D_1B_1$. Найдите длину отрезка EF.

Решение. Длину отрезка EF найдем по теореме косинусов из треугольника D_1EF (рис. 1), в котором $D_1F = \dfrac{2}{3}\sqrt{2}$, $D_1E = \dfrac{1}{3}\sqrt{2}$, $\angle FD_1E = \dfrac{\pi}{3}$ (треугольник AB_1D_1 является равносторонним). Имеем

$$EF^2 = D_1E^2 + D_1F^2 - 2D_1E\cdot D_1F\cdot\cos\frac{\pi}{3} =$$
$$= \frac{2}{9} + \frac{8}{9} - 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{3}, \text{ откуда } EF = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

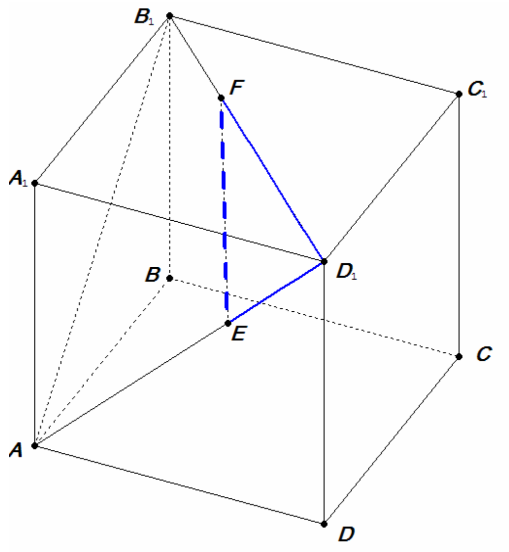

Рис. 1

Ответ: $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

1. (П) Ребра правильной четырехугольной призмы равны 1, 4 и 4. Найдите расстояние от вершины до центра основания призмы, не содержащего эту вершину.
Ответ: 3.

2. Расстояние от точки до прямой

Расстояние от точки до прямой, не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, проведенного из этой точки на прямую.

Расстояние между двумя параллельными прямыми равно длине отрезка их общего перпендикуляра.

Расстояние между двумя параллельными прямыми равно расстоянию от любой точки одной из этих прямых до другой прямой.

Расстояние от точки до прямой можно вычислить:

1) как длину отрезка перпендикуляра, если удается включить этот отрезок в некоторый треугольник в качестве одной из высот;
2) используя векторный метод;
3) используя координатно-векторный метод.

Пример 2. При условиях примера 1 найдите расстояние от точки D_1 до прямой *EF*.

Решение. Пусть *h* – длина высоты треугольника D_1EF, опущенной из точки D_1. Найдем *h*, используя метод площадей. Площадь треугольника D_1EF равна $\frac{1}{2}D_1F \cdot D_1E \cdot \sin\angle FD_1E =$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{9}$. С другой стороны площадь треугольника D_1EF равна $\frac{1}{2}FE\cdot h=\frac{\sqrt{6}}{6}h$. Из уравнения $\frac{\sqrt{3}}{9}=\frac{\sqrt{6}}{6}h$ находим искомое расстояние $h=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Замечание. Можно заметить, что выполняется равенство $FE^2+D_1E^2=D_1F^2$, то есть треугольник D_1EF прямоугольный и длина отрезка D_1E является искомым расстоянием.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

1. (П) В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки *A* до прямой:
а) B_1D_1; б) A_1C; в) BD_1.

Ответ: а) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; в) $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

2. (П) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки *A* до прямой BC_1.

Ответ: $\frac{\sqrt{14}}{4}$.

3. (П) В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки *A* до прямой:
а) *DE*; б) D_1E_1; в) B_1C_1; г) BE_1; д) BC_1; е) CE_1; ж) CF_1; з) CB_1.

Ответ: а) $\sqrt{3}$; б) 2; в) $\frac{\sqrt{7}}{2}$; г) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; д) $\frac{\sqrt{14}}{4}$; е) $\sqrt{2}$; ж) $\frac{\sqrt{30}}{5}$; з) $\frac{\sqrt{30}}{4}$.

4. (П) Основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – ромб $ABCD$, в котором $AB=10$, $AC=6\sqrt{7}$. Боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{21}$. Найдите расстояние от вершины *B* до прямой AC_1.

Ответ: 8.

3. Расстояние от точки до плоскости

● *Расстояние от точки до плоскости*, не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.

● *Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью* равно длине их общего перпендикуляра.

● *Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью* равно расстоянию от любой точки этой прямой до плоскости.

● *Расстояние между двумя параллельными плоскостями* равно длине их общего перпендикуляра.

● *Расстояние между двумя параллельными плоскостями* равно расстоянию между точкой одной из этих плоскостей и другой плоскостью.

Расстояние от точки *M* до плоскости α
1) равно расстоянию до плоскости α от произвольной точки *P*, лежащей на прямой *l*, которая проходит через точку *M* и параллельна плоскости α;
2) равно расстоянию до плоскости α от произвольной точки *P*, лежащей на плоскости β, которая проходит через точку *M* и параллельна плоскости α;
3) вычисляется по формуле $\rho=\rho_1\frac{r}{r_1}$, где $\rho=\rho(M;\alpha)$, $\rho_1=\rho(M_1;\alpha)$, $OM=r$, $OM_1=r_1$, $MM_1\cap\alpha=O$; в частности, $\rho=\rho_1$, если $r=r_1$:
прямая *m*, проходящая через точку *M*, пересекает плоскость α в точке *O*, а точка M_1 лежит на прямой *m*;
4) вычисляется по формуле
$\rho(M;\alpha)=\rho(M;ABC)=\frac{3V_{ABCM}}{S_{ABC}}$, где треугольник *ABC* расположен на плоскости α, а объем пирамиды *ABCM* равен V_{ABCM};

5) вычисляется по формуле

$$\rho(M;\alpha)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$ где

$M(x_0;y_0;z_0)$, плоскость α задана уравнением $Ax+By+Cz+D=0$;

6) находится с помощью векторного метода;

7) находится с помощью координатно-векторного метода.

Пример 3. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки C_1 до плоскости AB_1C.

Решение. Так как прямая A_1C_1 параллельна AC, то прямая A_1C_1 параллельна плоскости AB_1C (рис. 2). Поэтому искомое расстояние h равно расстоянию от произвольной точки прямой A_1C_1 до плоскости AB_1C. Например, расстояние от центра O_1 квадрата $A_1B_1C_1D_1$ до плоскости AB_1C равно h.

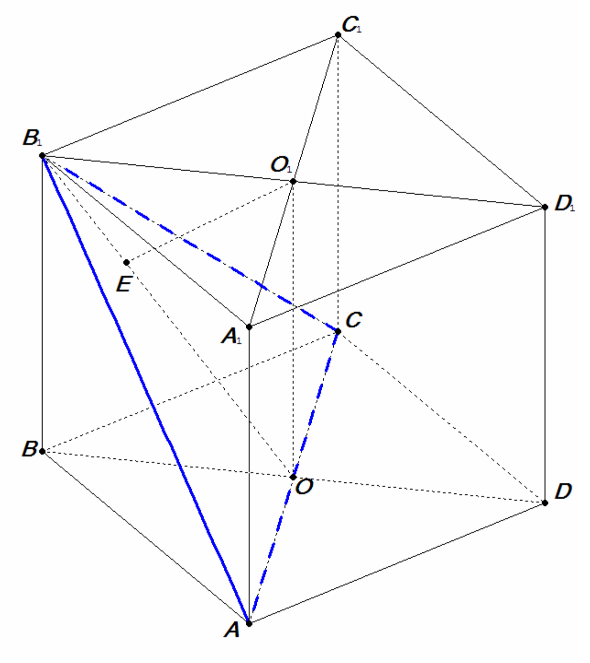

Рис. 2

Пусть E – основание перпендикуляра, опущенного из точки O_1 на прямую B_1O, где O – центр квадрата $ABCD$. Прямая O_1E лежит в плоскости BB_1D_1D, а прямая AC перпендикулярна этой плоскости. Поэтому $O_1E \perp AC$ и O_1E - перпендикуляр к плоскости AB_1C, а $O_1E=h$.

Так как $B_1O_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $O_1O=1$, то $OB_1=\sqrt{\frac{1}{2}+1}=\sqrt{\frac{3}{2}}$. Выражая двумя способами площадь треугольника B_1O_1O, получим $h\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1$, откуда $h=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

1. Ребро AD пирамиды $DABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC. Найдите расстояние от вершины A до плоскости, проходящей через середины ребер AB, AC и AD, если $AD=2\sqrt{5}$, $AB=AC=10$, $BC=4\sqrt{5}$.

Ответ: 2.

4. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно длине отрезка их общего перпендикуляра.

Расстояние между скрещивающимися прямыми

1) равно расстоянию от любой точки одной из этих прямых до плоскости, проходящей через вторую прямую параллельно первой прямой;

2) равно расстоянию между двумя параллельными плоскостями, содержащими эти прямые;

3) равно $\rho(a;b)=\rho(A;b_1)$, где $A=a_\alpha$, $b_1=b_\alpha$: если ортогональная проекция на плоскость α переводит прямую a в точку A, а прямую b в прямую b_1, то расстояние между скрещивающимися прямыми a и b равно расстоянию от точки A до прямой b_1;

4) вычисляется по формуле $\rho(AB;CD)=\frac{6V_{ABCD}}{AB\cdot CD\cdot\sin\varphi}$ где A и B – точки на одной прямой, C и D – точки на другой прямой, φ - угол между данными прямыми;

5) определяется с помощью векторного метода;

6) определяется с помощью координатно-векторного метода.

Пример 4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BD и SA.

Решение. Пусть E – основание перпендикуляра (рис. 3), опущенного из точки O на ребро SA. Так как прямая BD перпендикулярна плоскости AOS, то $BD \perp OE$.

Таким образом, OE – общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым BD и SA.

Найдем его длину, вычислив двумя способами площадь треугольника AOS.

Из равенства $AO \cdot SO = AS \cdot OE$, где $AO = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $AS = 1$, $SO = \frac{\sqrt{2}}{2}$ следует, что $OE = \frac{1}{2}$.

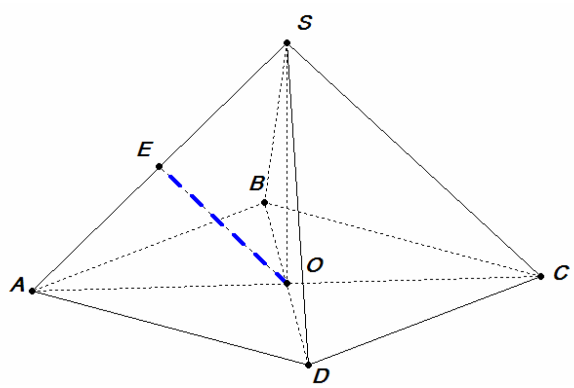

Рис. 3

Ответ: 0,5.

1. В пирамиде $DABC$ известны длины ребер: $AB = AC = DB = DC = 10$, $BC = DA = 12$. Найдите расстояние между прямыми DA и BC.
Ответ: $2\sqrt{7}$.

5. Угол между двумя прямыми

- *Углом между двумя пересекающимися прямыми* называется наименьший из углов, образованных при пересечении прямых.
- $0^\circ < \angle(a;b) \le 90^\circ$.
- *Углом между скрещивающимися прямыми* называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимся.
- Две прямые называются *перпендикулярными*, если угол между ними равен 90°.
- *Угол между параллельными прямыми* считается равным нулю.

• При нахождении угла между прямыми используют:

1) формулу $\cos\varphi = \frac{|b^2 + c^2 - a^2|}{2bc}$ для нахождения угла φ между прямыми m и l, если стороны a и b треугольника ABC соответственно параллельны этим прямым;

2) формулу $\cos\varphi = \frac{|\overline{p} \cdot \overline{q}|}{|\overline{p}| \cdot |\overline{q}|}$ или в координатной форме

$$\cos\varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

для нахождения угла φ между прямыми m и l, если векторы $\overline{p}(x_1; y_1; z_1)$ и $\overline{q}(x_2; y_2; z_2)$ параллельны соответственно этим прямым; в частности, для того чтобы прямые m и l были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы $\overline{p} \cdot \overline{q} = 0$ или $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$;

3) ключевые задачи.

Пример 5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми A_1D и D_1E, где E – середина ребра CC_1.

Решение. Пусть F – середина ребра BB_1, a – ребро куба, φ - искомый угол.

Так как $A_1F \| D_1E$, то φ - угол при вершине A_1 в треугольнике A_1FD.

Из треугольника BFD имеем

$FD^2 = BD^2 + BF^2 = 2a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{9a^2}{4}$, а из треугольника A_1B_1F получаем

$A_1F^2 = A_1B_1^2 + B_1F^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$, откуда

$A_1F = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Далее в треугольнике A_1FD используем теорему косинусов

$FD^2 = A_1D^2 + A_1F^2 - 2A_1D \cdot A_1F\cos\varphi$,

$\frac{9a^2}{4} = 2a^2 + \frac{5a^2}{4} - 2a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2}\cos\varphi$, откуда

$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$ и $\varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$.

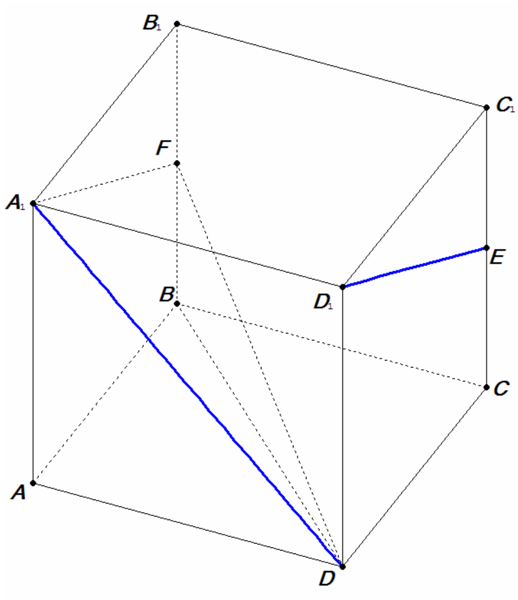

Рис. 4

Ответ: $\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$.

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E, F – середины ребер соответственно A_1B_1 и B_1C_1. Найдите косинус угла между прямыми AE и BF.
Ответ: 0,8.

2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E, F – середины ребер соответственно A_1B_1 и C_1D_1. Найдите косинус угла между прямыми AE и BF.

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка E – середина ребра A_1B_1. Найдите косинус угла между прямыми AE и BD_1.

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

4. К диагонали куба провели перпендикуляры из остальных вершин куба. На сколько частей и в каком отношении основания этих перпендикуляров разделили диагональ?
Ответ: на три части в отношении 1:1:1.

5. К диагонали A_1C куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ провели перпендикуляры из середин ребер AB и AD. Найдите угол между этими перпендикулярами.
Ответ: 60°.

6. К диагонали A_1C куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ провели перпендикуляры из вершин A и B. Найдите угол между этими перпендикулярами.
Ответ: 60°.

7. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB и A_1C.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

8. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

9. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда образуют с плоскостью его основания углы φ и ψ. Найдите угол между этими диагоналями.
Ответ: $\arccos(\sin\varphi\cdot\sin\psi)$

10. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, точки D, E – середины ребер соответственно A_1B_1 и B_1C_1. Найдите косинус угла между прямыми AD и BE.
Ответ: 0,7.

11. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, точка D – середина ребра A_1B_1. Найдите косинус угла между прямыми AD и BC_1.

Ответ: $\frac{3\sqrt{10}}{20}$.

12. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.
Ответ: 0,75.

13. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BD_1.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

14. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BE_1.

Ответ: 90°.

15. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, точки G, H – середины ребер соответственно A_1B_1 и B_1C_1. Найдите косинус угла между прямыми AG и BH.

Ответ: 0,9.

16. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, точка G – середина ребра A_1B_1. Найдите косинус угла между прямыми AG и BC_1.

Ответ: $\frac{\sqrt{10}}{4}$.

17. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, точка G – середина ребра A_1B_1. Найдите косинус угла между прямыми AG и BD_1.

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

18. Найдите угол между непересекающимися медианами граней правильного тетраэдра.

Ответ: $\arccos\frac{1}{6}$; $\arccos\frac{2}{3}$.

19. В правильной четырехугольной пирамиде *SABCD*, все ребра которой равны 1, точки *E*, *F* – середины ребер соответственно *SB* и *SC*. Найдите косинус угла между прямыми *AE* и *BF*.

Ответ: $\frac{1}{6}$.

20. Ребра AD и BC пирамиды *DABC* равны 24 см и 10 см. Расстояние между серединами ребер BD и AC равно 13 см. Найдите угол между прямыми AD и *BC*.

Ответ: 90°.

6. Угол между прямой и плоскостью

- *Углом между плоскостью и не перпендикулярной ей прямой* называется угол между этой прямой и ее проекцией на данную плоскость.
- $0^\circ < \angle(a;\alpha) < 90^\circ$.
- Угол между взаимно перпендикулярными прямой и плоскостью равен 90°.
- Если прямая параллельна плоскости (или лежит в ней), то угол между ними считается равным 0°.

Угол между прямой l и плоскостью α можно вычислить:

1) если этот угол удается включить в прямоугольный треугольник в качестве одного из острых углов;

2) по формуле $\sin\varphi = \sin\angle(l;\alpha) = \frac{\rho(M;\alpha)}{AM}$, где $M \in l$, $l \cap \alpha = A$;

3) по формуле $\sin\varphi = \frac{|\overline{n}\cdot\overline{p}|}{|\overline{n}|\cdot|\overline{p}|}$ или в координатной форме

$$\sin\varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$ где

$\overline{n}(x_1; y_1; z_1)$ - вектор нормали плоскости α,

$\overline{p}(x_2; y_2; z_2)$ - направляющий вектор прямой *l*;

- прямая l и плоскость α параллельны тогда и только тогда, когда $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$;

4) используя векторный метод;

5) используя координатно-векторный метод;

6) используя ключевые задачи.

Пример 6. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью AA_1C_1C.

Решение. Пусть D – середина A_1C_1, тогда B_1D - перпендикуляр к плоскости AA_1C_1C, а D – проекция точки B_1 на эту плоскость (рис. 5).

Если φ - искомый угол, то $\sin\varphi = \frac{B_1D}{AB_1}$, где $AB_1 = \sqrt{2}$, $B_1D = \frac{\sqrt{3}}{2}$, и поэтому $\sin\varphi = \frac{\sqrt{6}}{4}$, $\varphi = \arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$.

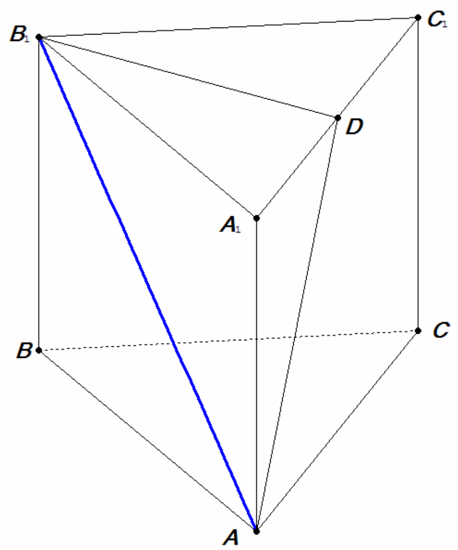

Рис. 5

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$.

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1.

Ответ: 30°.

2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите тангенс угла между прямой AA_1 и плоскостью BC_1D.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите тангенс угла между прямой AC_1 и плоскостью BCC_1.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка E – середина ребра A_1B_1. Найдите синус угла между прямой AE и плоскостью BDD_1.

Ответ: $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка E – середина ребра A_1B_1. Найдите синус угла между прямой AE и плоскостью BDC_1.

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{15}$.

6. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью AA_1C и прямой A_1B, если $AA_1 = 3$, $AB = 4$, $BC = 4$.

Ответ: $\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{5}$.

7. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью A_1BC и прямой BC_1, если $AA_1 = 8$, $AB = 6$, $BC = 15$.

Ответ: $\arcsin\frac{24}{85}$.

8. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AA_1 = 4$, $A_1D_1 = 6$, $C_1D_1 = 6$ найдите тангенс угла между плоскостью ADD_1 и прямой EF, проходящей через середины ребер AB и B_1C_1.

Ответ: $\frac{3}{5}$.

9. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 4$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$ найдите тангенс угла между плоскостью ABC и прямой EF, проходящей через середины ребер AA_1 и C_1D_1.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

10. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, точка D – середина ребра A_1B_1. Найдите синус угла между прямой AD и плоскостью BCC_1.

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{10}$.

11. В основании прямой призмы $MNKM_1N_1K_1$ лежит прямоугольный треугольник MNK, у которого угол N равен 90°, угол M равен 60°, $NK = 18$. Диагональ боковой грани M_1N составляет угол 30° с плоскостью MM_1K_1. Найдите высоту призмы.

Ответ: $6\sqrt{6}$.

12. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC, у которого угол C равен 90°, угол A равен 30°, $AC = 10\sqrt{3}$. Диагональ боковой грани B_1C составляет угол 30° с плоскостью AA_1B_1. Найдите высоту призмы.

Ответ: $10\sqrt{2}$.

Критерии:

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ.	2
Способ нахождения искомой величины верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

13. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, точка G – середина ребра A_1B_1. Найдите синус угла между прямой AG и BCC_1.

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{10}$.

14. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, точка G – середина ребра A_1B_1. Найдите синус угла между прямой AG и BDD_1.

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

15. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямой AB и плоскостью SAD.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

16. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, боковые ребра которой равны 2, а стороны основания – 1, найдите косинус угла между прямой AC и плоскостью SAF.

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

7. Угол между плоскостями

- *Двугранный угол, образованный полуплоскостями измеряется величиной его линейного угла, получаемого при пересечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру.*
- *Величина двугранного угла принадлежит промежутку* $(0^\circ;180^\circ)$.
- *Величина угла между пересекающимися плоскостями принадлежит промежутку* $(0^\circ;90^\circ]$.
- *Угол между двумя параллельными плоскостями* считается равным 0°.

Угол между пересекающимися плоскостями можно вычислить:

1) как угол между прямыми, лежащими в этих плоскостях и перпендикулярными к линии их пересечения;
2) как угол треугольника, если удается включить линейный угол в некоторый треугольник;
3) по формуле $\sin\angle(\alpha;\beta)=\frac{\rho(M;\beta)}{\rho(M;l)}$, где $M\in\alpha$; $\alpha\cap\beta=l$;
4) по формуле $\cos\angle(\alpha;\beta)=\frac{S'}{S}$, где S – площадь фигуры Φ, расположенной в плоскости α, S' - площадь проекции фигуры Φ на плоскость β;
5) как угол между перпендикулярными им прямыми;
6) по формуле $\cos\angle(\alpha;\beta)=\frac{|\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}|}{|\overline{n_1}|\cdot|\overline{n_2}|}$ или в координатной форме $\cos\angle(\alpha;\beta)=$ $=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$, где $\overline{n_1}(A_1;B_1;C_1)$ - вектор нормали плоскости $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $\overline{n_2}(A_2;B_2;C_2)$ - вектор нормали плоскости $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$;
7) используя ключевые задачи.

Пример 7. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите двугранный угол между основанием и боковой гранью.

Решение. Пусть E и K – середины ребер AD и BC соответственно, O – центр основания $ABCD$ (рис. 6). Тогда $SE\perp AD$, $EK\perp AD$ и поэтому $\angle SEK=\varphi$ - линейный угол данного двугранного угла.

Так как $AD=1$, $OE=\frac{1}{2}$, $SD=1$, то

$SE=\sqrt{SD^2-ED^2}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\cos\varphi=\frac{OE}{SE}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\varphi=\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

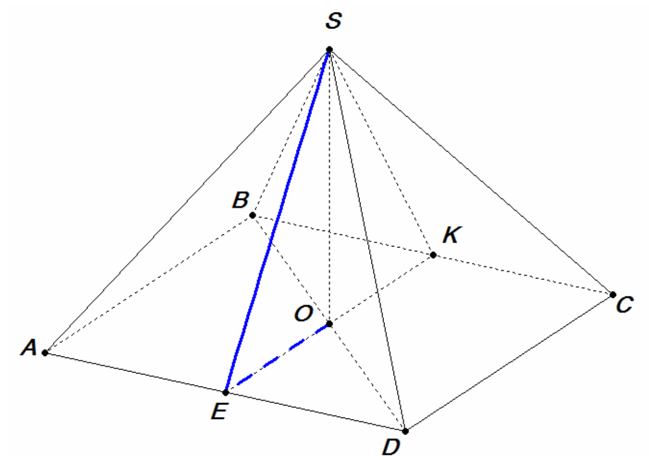

Рис. 6

Ответ: $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между плоскостями AB_1C_1 и A_1B_1C.

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

2. Диагональ A_1C куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит ребром двугранного угла, грани которого проходят через середины ребер AB и DD_1. Найдите величину этого угла.

Ответ: 120°.

3. Диагональ $A'C$ куба $ABCDA'B'C'D'$ служит ребром двугранного угла, грани которого проходят через B и D. Найдите величину этого угла.

Ответ: 120°.

4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E, F – середины ребер соответственно A_1B_1 и A_1D_1. Найдите тангенс угла между плоскостями AEF и BCC_1.

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E, F – середины ребер соответственно A_1B_1 и A_1D_1. Найдите тангенс угла между плоскостями AEF и BDD_1.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

6. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины ребер: $AA_1 = 5$, $AB = 12$, $AD = 8$. Найдите тангенс угла между плоскостью ABC и плоскостью, проходящей через точку B перпендикулярно прямой AK, если K - середина ребра C_1D_1.

Ответ: 2.

7. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 4$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$ найдите тангенс угла между плоскостями CDD_1 и BDA_1.

Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

8. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 6$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$ найдите тангенс угла между плоскостями ACD_1 и $A_1B_1C_1$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

9. Основание прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 5$, $AD = \sqrt{33}$. Найдите тангенс угла между плоскостью грани AA_1D_1D призмы и плоскостью, проходящей через середину ребра CD перпендикулярно прямой B_1D, если расстояние между прямыми A_1C_1 и BD равно $\sqrt{3}$.

Ответ: 1,2.

10. Основание прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 12$, $AD = \sqrt{31}$. Найдите тангенс угла между плоскостью основания призмы и плоскостью, проходящей через середину ребра AD перпендикулярно прямой BD_1, если расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно 5.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

11. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью A_1BC и плоскостью основания призмы.

Ответ: 30°.

12. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями
ACB_1 и A_1C_1B.

Ответ: $\arccos\frac{1}{7}$.

13. (Демо 2010) Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью A_1BC и плоскостью основания призмы.

Ответ: 30°.

14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, точки D, E – середины ребер соответственно A_1B_1 и A_1C_1. Найдите тангенс угла между плоскостями ADE и BCC_1.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

15. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC = 10$, $AC = 16$. Боковое ребро призмы равно 24. Точка P – середина ребра BB_1. Найдите тангенс угла между плоскостями $A_1B_1C_1$ и ACP.

Ответ: 2.

16. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC = 20$, $AC = 32$. Боковое ребро призмы равно 24. Точка P принадлежит ребра BB_1, причем $BP : PB_1 = 1 : 3$. Найдите тангенс угла между плоскостями $A_1B_1C_1$ и ACP.

Ответ: 0,5.

17. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является треугольник ABC, в котором $AB = AC = 8$, а один из углов равен 60°. На ребре AA_1 отмечена точка P так, что $AP : PA_1 = 2 : 1$. Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и CBP, если расстояние между прямыми AB и C_1B_1 равно $18\sqrt{3}$.

Ответ: 3.

18. Основанием прямой треугольной

призмы $ABCA_1B_1C_1$ является треугольник ABC, в котором $AC = BC = 6$, а один из углов равен 60°. На ребре CC_1 отмечена точка P так, что $CP : PC_1 = 2:1$. Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и ABP, если расстояние между прямыми AC и A_1B_1 равно $18\sqrt{3}$.

Ответ: 4.

19. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC. Найдите тангенс угла между плоскостью $A_1B_1C_1$ и плоскостью, проходящей через середину ребра AA_1 и прямую BC, если $AB = 4$, $BB_1 = 12$.

Ответ: 1,5.

20. Основание пирамиды $DABC$ - равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC = 13$, $AC = 24$. Ребро DB перпендикулярно плоскости основания и равно 20. Найдите тангенс двугранного угла при ребре AC.

Ответ: 4.

21. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями ABC и BCS.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

22. Диаметр окружности основания цилиндра равен 20, образующая цилиндра равна 28. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 12 и 16. Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

Ответ: 2 или 14.

23. Диаметр окружности основания цилиндра равен 26, образующая цилиндра равна 21. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 24 и 10. Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

Ответ: 3 или $\frac{21}{17}$.

8. Разные задачи

1. Найдите радиус сферы, внутри которой расположены четыре шара радиуса r. Каждый из этих шаров касается трех других и поверхности сферы.

Ответ: $r\left(1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

2. Три сферы, попарно касаясь друг друга, касаются плоскости треугольника в его вершинах. Найти радиусы сфер, если стороны треугольника равны a, b и c.

Ответ: $\frac{ab}{2c}; \frac{bc}{2a}; \frac{ac}{2b}$.

3. Плоскость пересекает боковые ребра SA, SB и SC треугольной пирамиды $SABC$ в точках K, L и M соответственно. В каком отношении делит эта плоскость объем пирамиды, если известно, что $\frac{SK}{KA} = \frac{SL}{LB} = 2$, а медиану SN треугольника SBC эта плоскость делит пополам.

Ответ: $\frac{8}{37}$.

4. Найти угол при вершине в осевом сечении конуса, если на его поверхности можно провести три попарно перпендикулярные образующие.

Ответ: $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.

5. Какие значения принимает угол между образующими конуса, если его образующая в два раза больше радиуса основания?

Ответ: $\left(0^\circ;60^\circ\right]$.

9. Координатный метод

Пример 8. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E и K - середины ребер AA_1 и CD соответственно, а точка M расположена на диагонали B_1D_1 так, что $B_1M = 2MD_1$. Найдите расстояние между точками Q и L, где Q – середина отрезка EM, а L – точка отрезка MK такая, что $ML = 2LK$.

Решение. Введем прямоугольную систему координат, как указано на рисунке 7. Тогда $E\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$, $K\left(1;\frac{1}{2};0\right)$, $B_1(0;1;1)$, $D_1(1;0;1)$. Для нахождения координат точки M используем формулу координат точки, делящей отрезок B_1D_1 в отношении 2:1. Имеем $M\left(\frac{0+2\cdot 1}{1+2};\frac{1+2\cdot 0}{1+2};\frac{1+2\cdot 1}{1+2}\right) = \left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};1\right)$. Аналогично получим координаты точки L, делящей отрезок MK в отношении 2:1. Имеем $L\left(\frac{\frac{2}{3}+2\cdot 1}{1+2};\frac{\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{2}}{1+2};\frac{1+2\cdot 0}{1+2}\right) = \left(\frac{8}{9};\frac{4}{9};\frac{1}{3}\right)$ Координаты точки Q равны полусуммам соответствующих координат точек E и M, поэтому

$Q\left(\frac{1}{3};\frac{1}{6};\frac{3}{4}\right)$. Применим формулу для расстояния между точками с заданными координатами

$$QL=\sqrt{\left(\frac{1}{3}-\frac{8}{9}\right)^2+\left(\frac{1}{6}-\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{725}{36^2}}=\frac{5\sqrt{29}}{36}.$$

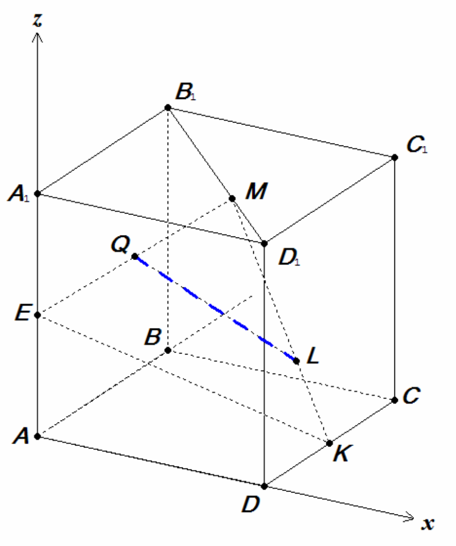

Рис. 7

Ответ: $\frac{5\sqrt{29}}{36}$.

Пример 9. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A_1 до плоскости BDC_1.

Решение. Составим уравнение плоскости, проходящей через точки $B(0;1;0)$, $D(1;0;0)$ и $C_1(1;1;1)$. Для этого подставим координаты этих точек в общее уравнение плоскости $Ax+By+Cz+D=0$. Получим систему уравнений

$$\begin{cases}B+D=0\\A+D=0\\A+B+C+D=0\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}B=-D\\A=-D\\C=D\end{cases}$$

Отсюда находим уравнение $-Dx-Dy+Dz+D=0$ или $x+y-z-1=0$. По формуле находим расстояние от точки $A_1(0;0;1)$ до плоскости $\beta=BDC_1$:

$$\rho(A_1;\beta)=\frac{|0+0-1-1|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

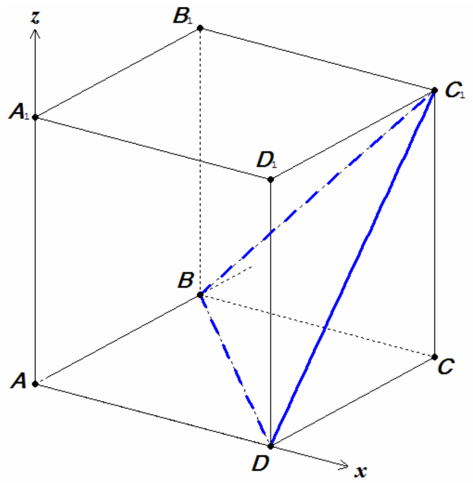

Рис. 8

Ответ: $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

10. Координатно-векторный метод

Пример 10. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между диагональю куба BD_1 и диагональю грани AB_1.

Решение. Введем прямоугольную систему координат (рис. 9), тогда

$A(0;0;0)$, $B(0;1;0)$, $B_1(0;1;1)$, $D_1(1;0;1)$.

Пусть EF – общий перпендикуляр скрещивающихся прямых BD_1 и AB_1, то есть $EF\perp AB_1$, $EF\perp BD_1$, причем $E\in AB_1$ и $F\in BD_1$. Обозначим $\lambda=\frac{AE}{B_1E}$, $\mu=\frac{BF}{D_1F}$ и воспользуемся формулами для координат точки, которая делит данный отрезок в заданном отношении. Получим $E\left(0;\frac{\lambda}{1+\lambda};\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)$, $F\left(\frac{\mu}{1+\mu};\frac{1}{1+\mu};\frac{\mu}{1+\mu}\right)$.

Пусть $\frac{\lambda}{1+\lambda}=p$, $\frac{\mu}{1+\mu}=q$, тогда $E(0;p;p)$, $F(q;1-q;q)$. Так как вектор $\overline{EF}=(q;\,1-q-p;\,q-p)$ должен быть перпендикулярным векторам $\overline{AB_1}=(0;1;1)$ и $\overline{BD_1}=(1;-1;\,1)$, то имеем систему уравнений:

$$\begin{cases}\overline{AB_1}\cdot\overline{EF}=0\\ \overline{BD_1}\cdot\overline{EF}=0\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}1-q-p+q-p=0\\ q-1+q+p+q-p=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}p=\frac{1}{2}\\ q=\frac{1}{3}\end{cases}$$

Отсюда $\overline{EF}=\left(\frac{1}{3};\frac{1}{6};-\frac{1}{6}\right)$,

$$EF=\left|\overline{EF}\right|=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}}=\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

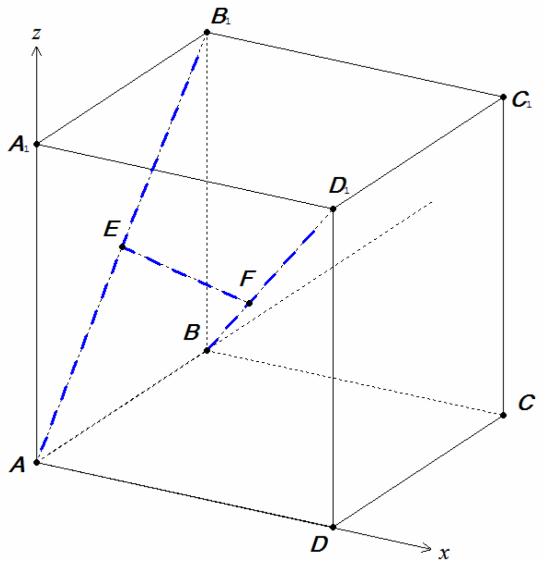

Рис. 9

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Пример 11. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AE и DF, где E и F – точки, расположенные на ребрах CD и C_1D_1 так, что $DE=\frac{1}{3}DC$, $C_1F=\frac{1}{3}C_1D_1$.

Решение. Введем прямоугольную систему координат, как указано на рисунке 10. Тогда

$A(0;0;0)$, $D(1;0;0)$, $E\left(1;\frac{1}{3};0\right)$, $F\left(1;\frac{2}{3};1\right)$,

$\overline{AE}=\left(1;\frac{1}{3};0\right)$, $\overline{DF}=\left(0;\frac{2}{3};1\right)$,

$$\cos\alpha=\frac{\left|\overline{AE}\cdot\overline{DF}\right|}{\left|\overline{AE}\right|\cdot\left|\overline{DF}\right|}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{\sqrt{10}}{3}\cdot\frac{\sqrt{13}}{3}}=\frac{2}{\sqrt{130}},$$

$\alpha=\arccos\frac{2}{\sqrt{130}}$, где α - искомый угол.

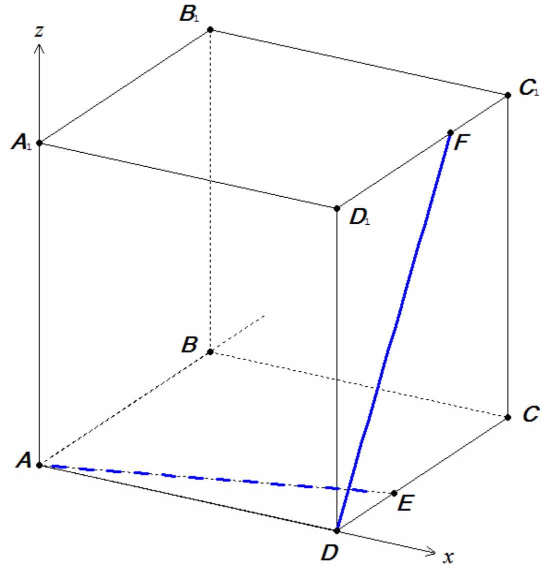

Рис. 10

Ответ: $\arccos\frac{2}{\sqrt{130}}$.

Пример 12. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой AD_1 и плоскостью α, проходящей через точки A_1, E и F, где точка E – середина ребра C_1D_1, а точка F лежит на ребре DD_1, так, что $D_1F=2DF$.

Решение. Введем прямоугольную систему координат, как указано на рисунке 11. Тогда

$A(0;0;0)$, $A_1(0;0;1)$, $D_1(1;0;1)$, $E\left(1;\frac{1}{2};1\right)$,

$F\left(1;0;\frac{1}{3}\right)$, $\overline{AD_1}=(1;0;1)$, $\overline{A_1E}=\left(1;\frac{1}{2};0\right)$,

$\overline{A_1F}=\left(1;0;-\frac{2}{3}\right)$. Пусть $\bar{n}=(x;y;z)$ - вектор, перпендикулярный плоскости α, φ - искомый угол. Тогда $\sin\varphi=\frac{\left|\overline{AD_1}\cdot\bar{n}\right|}{\left|\overline{AD_1}\right|\cdot\left|\bar{n}\right|}$.

Вектор $\bar{n}$ найдем из условий перпендикулярности этого вектора векторам $\overline{A_1E}$ и $\overline{A_1F}$, т.е. из условий

$$\begin{cases}\bar{n}\cdot\overline{A_1E}=0\\ \bar{n}\cdot\overline{A_1F}=0\end{cases} \text{ или } \begin{cases}x+\frac{y}{2}=0\\ x-\frac{2}{3}z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-2x\\ z=1{,}5x.\end{cases}$$

Пусть $x=2$, тогда $y=-4$, $z=3$ и $\bar{n}=(2;-4;3)$, $\left|\bar{n}\right|=\sqrt{29}$.

Так как $\overline{AD_1} \cdot \overline{n} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-4) + 1 \cdot 3 = 5$, $\left|\overline{AD_1}\right| = \sqrt{2}$, то $\sin\varphi = \dfrac{5}{\sqrt{58}}$.

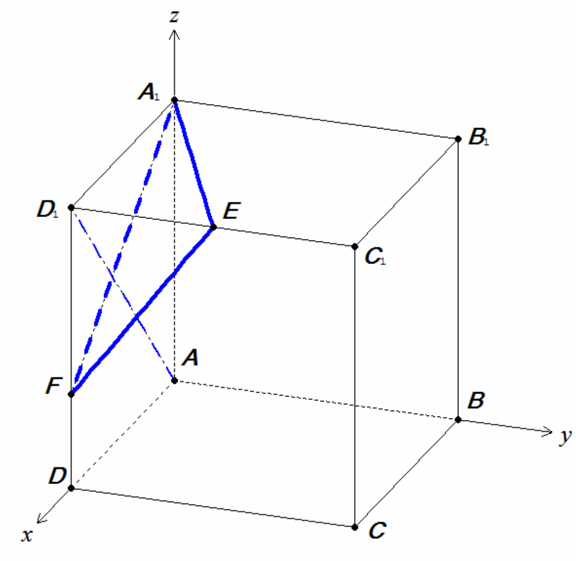

Рис. 11

Ответ: $\arcsin\dfrac{5}{\sqrt{58}}$.

Пример 13. Найдите угол между плоскостями $2x+3y+6z-5=0$ и $4x+4y+2z-7=0$.

Решение. Рассмотрим векторы $\overline{n}=(2;3;6)$ и $\overline{m}=(4;4;2)$, перпендикулярные к данным плоскостям. Искомый угол найдем по формуле
$$\cos\varphi = \frac{\left|\overline{n}\cdot\overline{m}\right|}{\left|\overline{n}\right|\cdot\left|\overline{m}\right|}.$$
Так как $\overline{n}\cdot\overline{m} = 2\cdot 4 + 3\cdot 4 + 6\cdot 2 = 32$,
$\left|\overline{n}\right| = \sqrt{4+9+36} = 7$, $\left|\overline{m}\right| = \sqrt{16+16+4} = 6$, то
$\cos\varphi = \dfrac{16}{21}$, откуда $\arccos\varphi = \dfrac{16}{21}$.

Ответ: $\arccos\dfrac{16}{21}$.

Пример 14. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями AD_1E и D_1FC, где точки E и F – середины ребер A_1B_1 и B_1C_1 соответственно.

Решение. Введем прямоугольную систему координат, как указано на рисунке 12. Тогда
$A(0;0;0)$, $C(1;1;0)$, $D_1(1;0;1)$, $E\left(0;\dfrac{1}{2};1\right)$,

$F\left(\dfrac{1}{2};1;1\right)$, $\overline{AD_1} = (1;0;1)$, $\overline{AE} = \left(0;\dfrac{1}{2};1\right)$,
$\overline{CD_1} = (0;-1;1)$, $\overline{CF} = \left(-\dfrac{1}{2};0;1\right)$.

Найдем вектор $\overline{n} = (x;y;z)$, перпендикулярный плоскости AD_1E. Этот вектор должен быть перпендикулярным векторам $\overline{AE}$ и $\overline{AD_1}$ и поэтому
$$\begin{cases}\overline{n}\cdot\overline{AE}=0\\ \overline{n}\cdot\overline{AD_1}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{y}{2}+z=0\\ x+z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-2z\\ x=-z.\end{cases}$$
Пусть $z=-1$, тогда $x=1$, $y=2$ и $\overline{n}=(1;2;-1)$.
Найдем вектор $\overline{m}=(x;y;z)$, перпендикулярный плоскости D_1FC. Этот вектор должен быть перпендикулярным векторам $\overline{CD_1}$ и $\overline{CF}$ и поэтому
$$\begin{cases}\overline{m}\cdot\overline{CD_1}=0\\ \overline{m}\cdot\overline{CF}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-y+z=0\\ -\dfrac{x}{2}+z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=z\\ x=2z.\end{cases}$$
Пусть $z=1$, тогда $x=2$, $y=1$ и $\overline{m}=(2;1;1)$.
Для нахождения искомого угла φ используем формулу $\cos\varphi = \dfrac{\left|\overline{n}\cdot\overline{m}\right|}{\left|\overline{n}\right|\cdot\left|\overline{m}\right|}$. Так как
$\overline{n}\cdot\overline{m} = 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + (-1)\cdot 1 = 3$, $\left|\overline{n}\right| = \sqrt{6}$, $\left|\overline{m}\right| = \sqrt{6}$,
то $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$, откуда $\varphi = 60^\circ$.

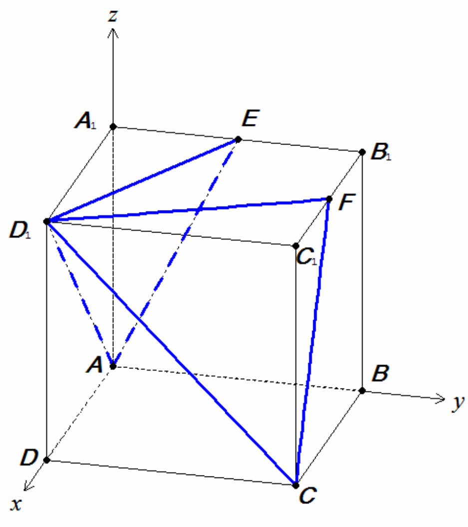

Рис. 12

Ответ: 60°.

11. Векторный метод

Пример 15. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на диагоналях граней AD_1 и D_1B_1 взяты точки E и F так, что $D_1E=\frac{1}{3}AD_1$, $D_1F=\frac{2}{3}D_1B_1$. Найдите длину отрезка EF.

Решение. Пусть $\overline{AD}=\overline{a}$, $\overline{AB}=\overline{b}$, $\overline{AA_1}=\overline{c}$ (рис. 1), тогда $|\overline{a}|=|\overline{b}|=|\overline{c}|=1$, $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{a}\cdot\overline{c}=\overline{b}\cdot\overline{c}=0$.

Выразим вектор $\overline{FE}$ через базисные векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$:

$$\overline{FE}=\overline{EA}+\overline{AB_1}+\overline{B_1F}=-\frac{2}{3}(\overline{a}+\overline{c})+(\overline{b}+\overline{c})+\frac{1}{3}(\overline{a}-\overline{b})=$$

$=-\frac{1}{3}\overline{a}+\frac{2}{3}\overline{b}+\frac{1}{3}\overline{c}$. Тогда

$$|\overline{FE}|=\sqrt{\overline{FE}^2}=\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\overline{a}+\frac{2}{3}\overline{b}+\frac{1}{3}\overline{c}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}}=$$

$$=\sqrt{\frac{6}{9}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Пример 16. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки D_1 до прямой PQ, где P и Q – середины соответственно ребер A_1B_1 и BC.

Решение. Пусть $\overline{AD}=\overline{a}$, $\overline{AB}=\overline{b}$, $\overline{AA_1}=\overline{c}$ (рис. 1), тогда $|\overline{a}|=|\overline{b}|=|\overline{c}|=1$, $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{a}\cdot\overline{c}=\overline{b}\cdot\overline{c}=0$.

Выразим вектор $\overline{PQ}$ через базисные векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$:

$$\overline{PQ}=\overline{PB_1}+\overline{B_1B}+\overline{BQ}=\frac{1}{2}\overline{b}-\overline{c}+\frac{1}{2}\overline{a}=\frac{1}{2}\overline{a}+\frac{1}{2}\overline{b}-\overline{c}$$

. $\overline{PD_1}=-\frac{1}{2}\overline{b}+\overline{a}$. Пусть $D_1N\perp PQ$, где $N\in PQ$. Выразим вектор $\overline{D_1N}$, учитывая коллинеарность векторов $\overline{PN}$ и $\overline{PQ}$: $\overline{D_1N}=\overline{PN}-\overline{PD_1}=x\cdot\overline{PQ}-\overline{PD_1}$. Так как $\overline{D_1N}\perp\overline{PQ}$, то $\overline{D_1N}\cdot\overline{PQ}=0$. Отсюда получаем $(x\cdot\overline{PQ}-\overline{PD_1})\cdot\overline{PQ}=0$, $x\cdot\overline{PQ}^2=\overline{PD_1}\cdot\overline{PQ}$,

$$x\cdot\left(\frac{1}{2}\overline{a}+\frac{1}{2}\overline{b}-\overline{c}\right)^2=\left(-\frac{1}{2}\overline{b}+\overline{a}\right)\left(\frac{1}{2}\overline{a}+\frac{1}{2}\overline{b}-\overline{c}\right),$$

$$x\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4},\ x=\frac{1}{6}.$$

$$\overline{D_1N}=\frac{1}{6}\cdot\overline{PQ}-\overline{PD_1}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\overline{a}+\frac{1}{2}\overline{b}-\overline{c}\right)+\frac{1}{2}\overline{b}-\overline{a}=$$

$$=-\frac{11}{12}\overline{a}+\frac{7}{12}\overline{b}-\frac{1}{6}\overline{c}.$$

Длина вектора

$$|\overline{D_1N}|=\sqrt{\overline{D_1N}^2}=\sqrt{\left(-\frac{11}{12}\overline{a}+\frac{7}{12}\overline{b}-\frac{1}{6}\overline{c}\right)^2}=.$$

$$=\sqrt{\frac{121}{144}+\frac{49}{144}+\frac{1}{36}}=\frac{\sqrt{174}}{12}.$$

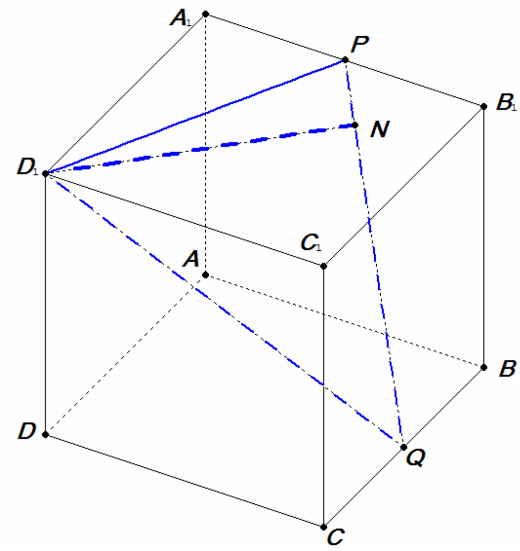

Рис. 13

Ответ: $\frac{\sqrt{174}}{12}$.

Пример 17. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A_1 до плоскости BDC_1.

Решение. Пусть $\overline{AD}=\overline{a}$, $\overline{AB}=\overline{b}$, $\overline{AA_1}=\overline{c}$ (рис. 14), тогда $|\overline{a}|=|\overline{b}|=|\overline{c}|=1$, $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{a}\cdot\overline{c}=\overline{b}\cdot\overline{c}=0$.

Выразим некоторые векторы через базисные векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$: $\overline{DB}=\overline{b}-\overline{a}$, $\overline{DC_1}=\overline{b}+\overline{c}$, $\overline{C_1A_1}=-\overline{a}-\overline{b}$. Пусть $MA_1\perp BDC_1$, где $M\in BDC_1$. Вектор $\overline{C_1M}=x\cdot\overline{DB}+y\cdot\overline{DC_1}$, поэтому

$$\overline{MA_1}=\overline{C_1A_1}-\overline{C_1M}=\overline{C_1A_1}-(x\cdot\overline{DB}+y\cdot\overline{DC_1}).$$

Далее имеем $\begin{cases}\overline{MA_1}\perp\overline{DB}\\ \overline{MA_1}\perp\overline{DC_1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overline{MA_1}\cdot\overline{DB}=0\\ \overline{MA_1}\cdot\overline{DC_1}=0\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\overline{C_1A_1}\cdot\overline{DB}-(x\cdot\overline{DB}^2+y\cdot\overline{DC_1}\cdot\overline{DB})=0\\ \overline{C_1A_1}\cdot\overline{DC_1}-(x\cdot\overline{DB}\cdot\overline{DC_1}+y\cdot\overline{DC_1}^2)=0\end{cases}$$

Так как $\overline{C_1A_1}\cdot\overline{DB}=(-\overline{a}-\overline{b})(\overline{b}-\overline{a})=\overline{a}^2-\overline{b}^2=0$,

$\overline{DC_1}\cdot\overline{DB}=(\overline{b}+\overline{c})(\overline{b}-\overline{a})=\overline{b}^2=1$,

$\overline{DC_1}\cdot\overline{C_1A_1}=(\bar b+\bar c)(-\bar a-\bar b)=-\bar b^2=-1$,

$\overline{DB}^2=(\bar b-\bar a)^2=\bar b^2+\bar a^2=2$,

$\overline{DC_1}^2=(\bar b+\bar c)^2=\bar b^2+\bar c^2=2$, то имеем

$$\begin{cases}0-(x\cdot 2+y\cdot 1)=0\\-1-(x\cdot 1+y\cdot 2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=0\\x+2y=-1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x=\frac{1}{3}\\y=-\frac{2}{3}\end{cases}$$

Отсюда получаем

$\overline{MA_1}=-\bar a-\bar b-\frac{1}{3}(\bar b-\bar a)+\frac{2}{3}(\bar b+\bar c)=-\frac{2}{3}\bar a-\frac{2}{3}\bar b+\frac{2}{3}\bar c$

$\left|\overline{MA_1}\right|=\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\bar a-\frac{2}{3}\bar b+\frac{2}{3}\bar c\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}}=\frac{2\sqrt3}{3}$

.

Ответ: $\frac{2\sqrt3}{3}$.

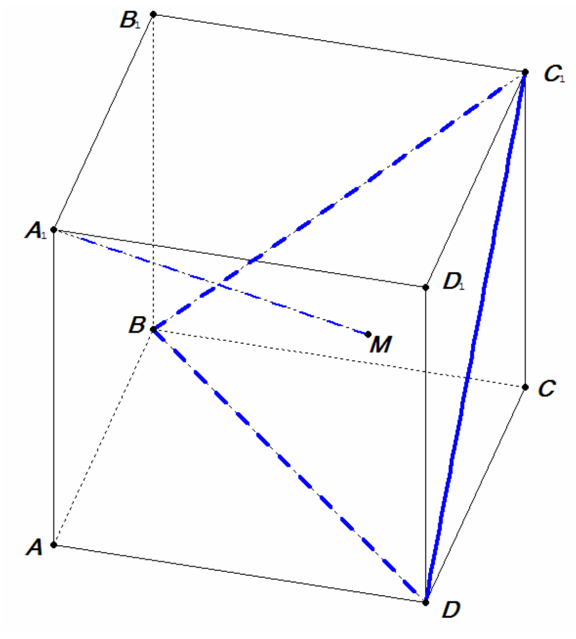

Рис. 14

Пример 18. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми AB_1 и BD.

Решение. Пусть $\overline{AD}=\bar a$, $\overline{AB}=\bar b$, $\overline{AA_1}=\bar c$ (рис. 15), тогда $|\bar a|=|\bar b|=|\bar c|=1$, $\bar a\cdot\bar b=\bar a\cdot\bar c=\bar b\cdot\bar c=0$.

Если M и N – основания общего перпендикуляра прямых AB_1 и BD соответственно, то имеем

$\overline{AB_1}=\bar b+\bar c$, $\overline{DB}=\bar b-\bar a$,

$\overline{MN}=\overline{MA}+\overline{AD}+\overline{DN}=x\cdot\overline{AB_1}+\bar a+y\cdot\overline{DB}=$

$=x(\bar b+\bar c)+\bar a+y(\bar b-\bar a)=$

$=(1-y)\cdot\bar a+(x+y)\cdot\bar b+x\cdot\bar c$.

Вектор $\overline{MN}$ перпендикулярен векторам $\overline{AB_1}$ и $\overline{DB}$, поэтому имеем

$$\begin{cases}\overline{MN}\cdot\overline{AB_1}=0\\\overline{MN}\cdot\overline{BD}=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}((1-y)\cdot\bar a+(x+y)\cdot\bar b+x\cdot\bar c)(\bar b+\bar c)=0\\((1-y)\cdot\bar a+(x+y)\cdot\bar b+x\cdot\bar c)(\bar b-\bar a)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)\cdot\bar b^2+x\cdot\bar c^2=0\\-(1-y)\cdot\bar a^2+(x+y)\cdot\bar b^2=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}2x+y=0\\x+2y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{1}{3}\\y=\frac{2}{3}\end{cases}$$

Итак,

$\overline{MN}=-\frac{1}{3}(\bar b+\bar c)+\bar a+\frac{2}{3}(\bar b-\bar a)=\frac{1}{3}\bar a+\frac{1}{3}\bar b-\frac{1}{3}\bar c$,

$\left|\overline{MN}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\bar a+\frac{1}{3}\bar b-\frac{1}{3}\bar c\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}=\frac{\sqrt3}{3}$.

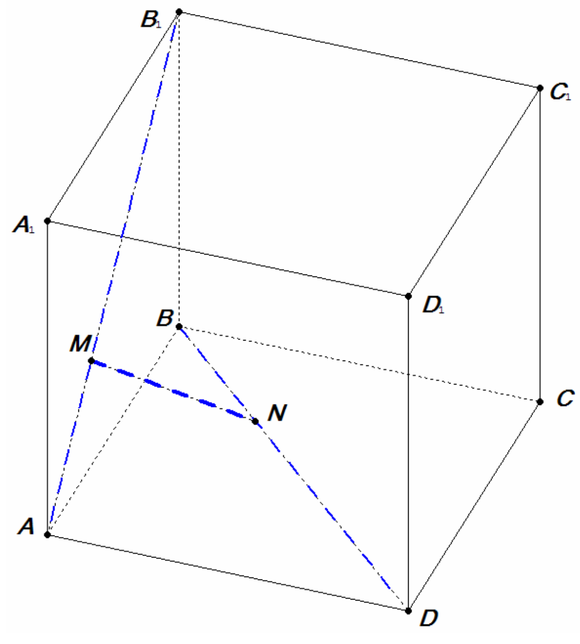

Рис. 15

Ответ: $\frac{\sqrt3}{3}$.

Пример 19. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми EF и PQ, где E, F, P, Q – середины ребер DD_1, BC, AA_1 и B_1C_1 соответственно.

Решение. Пусть $\overline{AD}=\overline{a}$, $\overline{AB}=\overline{b}$, $\overline{AA_1}=\overline{c}$ (рис. 16), где $|\overline{a}|=|\overline{b}|=|\overline{c}|=1$, $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{a}\cdot\overline{c}=\overline{b}\cdot\overline{c}=0$. Тогда $\overline{EF}=\overline{ED}+\overline{DC}+\overline{CF}=-\frac{1}{2}\overline{c}+\overline{b}-\frac{1}{2}\overline{a}$,

$\overline{PQ}=\overline{PA_1}+\overline{A_1B_1}+\overline{B_1Q}=\frac{1}{2}\overline{c}+\overline{b}+\frac{1}{2}\overline{a}$, откуда находим

$$\overline{PQ}\cdot\overline{EF}=\left(\frac{1}{2}\overline{c}+\overline{b}+\frac{1}{2}\overline{a}\right)\left(-\frac{1}{2}\overline{c}+\overline{b}-\frac{1}{2}\overline{a}\right)=$$

$$=\overline{b}^2-\frac{1}{4}\overline{c}^2-\frac{1}{4}\overline{a}^2=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

$$|\overline{PQ}|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\overline{c}+\overline{b}+\frac{1}{2}\overline{a}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}\overline{c}^2+\overline{b}^2+\frac{1}{4}\overline{a}^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}+1+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{2}},$$

$$|\overline{EF}|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\overline{c}+\overline{b}-\frac{1}{2}\overline{a}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}\overline{c}^2+\overline{b}^2+\frac{1}{4}\overline{a}^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}+1+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{2}},$$

$\cos\varphi=\dfrac{|\overline{PQ}\cdot\overline{EF}|}{|\overline{PQ}|\cdot|\overline{EF}|}=\dfrac{1}{2}:\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{3}$, $\varphi=\arccos\dfrac{1}{3}$, где φ - искомый угол.

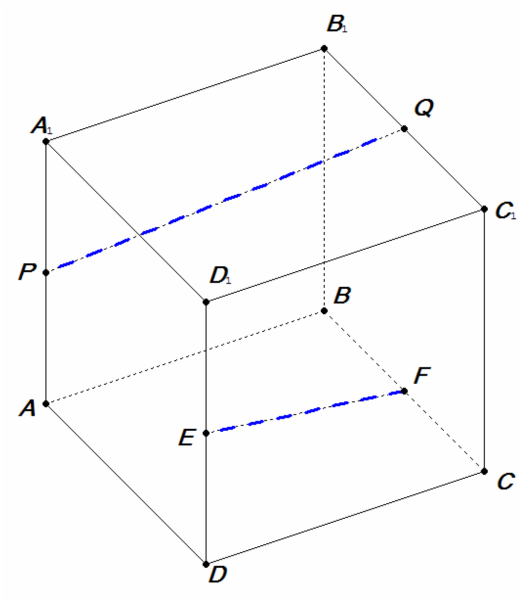

Рис. 16

Ответ: $\arccos\frac{1}{3}$.

Пример 20. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой DE, где E – середина апофемы SF грани ASB, и плоскостью ASC.

Решение. Так как прямая OD перпендикулярна плоскости ASC, то вектор $\overline{OD}$ является вектором нормали плоскости ASC.

Пусть $\overline{AD}=\overline{a}$, $\overline{AB}=\overline{b}$, $\overline{AS}=\overline{c}$ (рис. 17), где $|\overline{a}|=|\overline{b}|=|\overline{c}|=1$, $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$,

$\overline{a}\cdot\overline{c}=\overline{b}\cdot\overline{c}=|\overline{a}|^2\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$. Тогда

$$\overline{OD}=\overline{OA}+\overline{AD}=-\frac{1}{2}(\overline{a}+\overline{b})+\overline{a}=\frac{1}{2}(\overline{a}-\overline{b}),$$

$$\overline{DE}=\overline{DA}+\overline{AF}+\overline{FE}=-\overline{a}+\frac{1}{2}\overline{b}+\frac{1}{2}\left(\overline{c}-\frac{1}{2}\overline{b}\right)=$$

$$=-\overline{a}+\frac{1}{4}\overline{b}+\frac{1}{2}\overline{c},$$

$$\overline{DE}\cdot\overline{OD}=\left(-\overline{a}+\frac{1}{4}\overline{b}+\frac{1}{2}\overline{c}\right)\left(\frac{1}{2}\overline{a}-\frac{1}{2}\overline{b}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\overline{a}^2-\frac{1}{8}\overline{b}^2+\frac{1}{4}\overline{a}\cdot\overline{c}-\frac{1}{4}\overline{b}\cdot\overline{c}=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8},$$

$$|\overline{DE}|=\sqrt{\left(-\overline{a}+\frac{1}{4}\overline{b}+\frac{1}{2}\overline{c}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\overline{a}^2+\frac{1}{16}\overline{b}^2+\frac{1}{4}\overline{c}^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\overline{a}\cdot\overline{c}+2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}}=$$

$$=\sqrt{1+\frac{1}{16}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}=\sqrt{\frac{15}{16}},$$

$$|\overline{OD}|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\overline{a}-\frac{1}{2}\overline{b}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$\sin\varphi=\frac{|\overline{DE}\cdot\overline{OD}|}{|\overline{DE}|\cdot|\overline{OD}|}=\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{\sqrt{15}}\cdot\sqrt{2}=\frac{3}{\sqrt{30}},$$

$\varphi=\arcsin\dfrac{3}{\sqrt{30}}$, где φ - искомый угол.

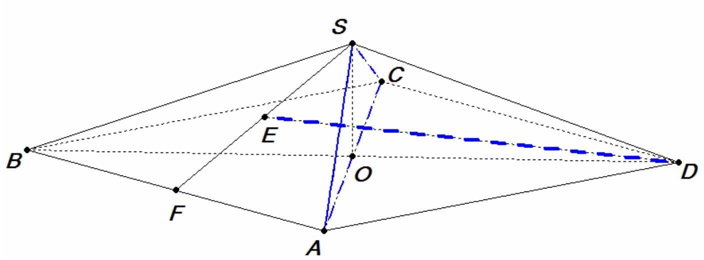

Рис. 17

Ответ: $\arcsin\dfrac{3}{\sqrt{30}}$.

Пример 21. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями AB_1C и BC_1D.

Решение. Пусть $\overline{AD} = \overline{a}$, $\overline{AB} = \overline{b}$, $\overline{AA_1} = \overline{c}$ (рис. 18), где $|\overline{a}| = |\overline{b}| = |\overline{c}| = 1$, $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a} \cdot \overline{c} = \overline{b} \cdot \overline{c} = 0$.

Векторы $\overline{BD_1}$ и $\overline{CA_1}$ являются векторами нормали плоскостей AB_1C и BC_1D соответственно, так как $BD_1 \perp AB_1C$ и $CA_1 \perp BC_1D$. Тогда

$\overline{BD_1} = \overline{a} - \overline{b} + \overline{c}$, $\overline{CA_1} = -\overline{a} - \overline{b} + \overline{c}$,

$$\overline{BD_1} \cdot \overline{CA_1} = (\overline{a} - \overline{b} + \overline{c})(-\overline{a} - \overline{b} + \overline{c}) = -\overline{a}^2 + \overline{b}^2 + \overline{c}^2 = 1$$

$$|\overline{BD_1}| = \sqrt{(\overline{a} - \overline{b} + \overline{c})^2} = \sqrt{\overline{a}^2 + \overline{b}^2 + \overline{c}^2} = \sqrt{3},$$

$$|\overline{CA_1}| = \sqrt{(-\overline{a} - \overline{b} + \overline{c})^2} = \sqrt{\overline{a}^2 + \overline{b}^2 + \overline{c}^2} = \sqrt{3},$$

$$\cos\varphi = \frac{|\overline{BD_1} \cdot \overline{CA_1}|}{|\overline{BD_1}| \cdot |\overline{CA_1}|} = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3}, \ \varphi = \arccos\frac{1}{3},$$

где φ - искомый угол.

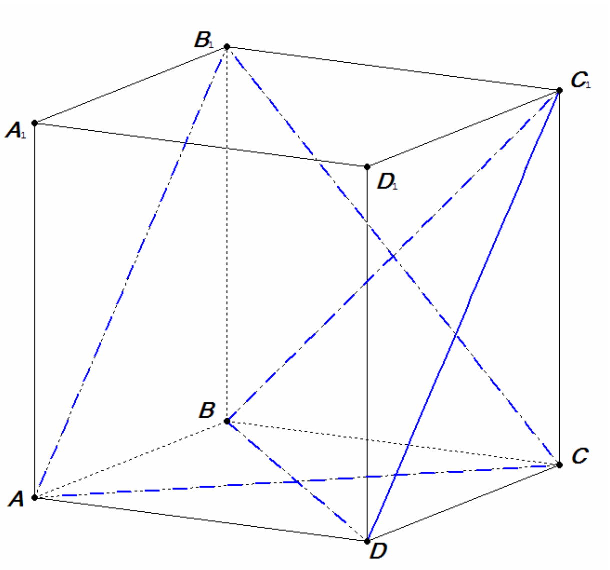

Рис. 18

Ответ: $\arccos\frac{1}{3}$.

12. Метод объемов

• При составлении уравнения используется объем фигуры, выраженный двумя независимыми способами.

Пример 22. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Найдите расстояние от точки C до плоскости BDC_1.

Решение. Искомое расстояние x равно высоте CQ (рис. 19), опущенной в пирамиде $BCDC_1$ из вершины C на основание BDC_1.

Объем этой пирамиды равен $\frac{1}{3} S_{BCD} \cdot CC_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD \cdot CC_1 = \frac{a^3}{6}$. С другой стороны, так как треугольник BDC_1 равносторонний со стороной $a\sqrt{2}$, объем пирамиды равен $\frac{1}{3} S_{BC_1D} \cdot CQ = \frac{1}{3} \cdot \frac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} \cdot x = \frac{a^2\sqrt{3}}{6} \cdot x$. Отсюда получаем уравнение $\frac{a^3}{6} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6} \cdot x$, из которого находим $x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

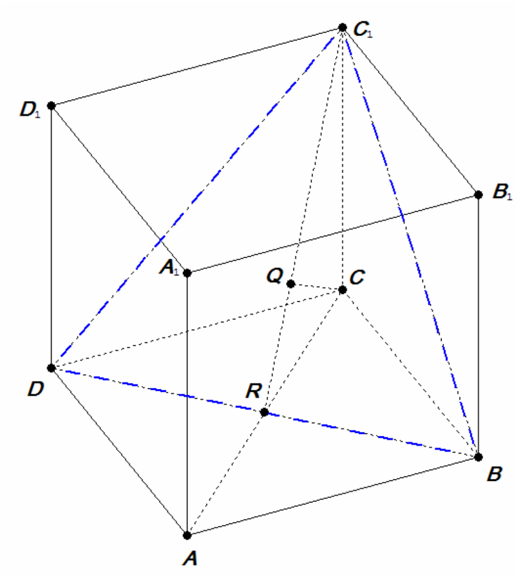

Рис. 19

Ответ: $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

13. Метод ключевых задач

<u>Ключевая задача № 1</u>

• Если S – площадь фигуры Φ, расположенной в плоскости α, S' - площадь проекции фигуры Φ на плоскость β, то справедлива формула $\cos\angle(\alpha;\beta) = \frac{S'}{S}$.

Пример 23. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями AB_1C и ABC.

Решение. Пусть α - искомый угол. Используем соотношение $S_{ABC} = S_{AB_1C} \cdot \cos\alpha$ (рис. 20), где $S_{ABC} = \frac{1}{2}$, $S_{AB_1C} = \frac{(\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (треугольник AB_1C равносторонний). Отсюда имеем $\cos\alpha = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\alpha = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

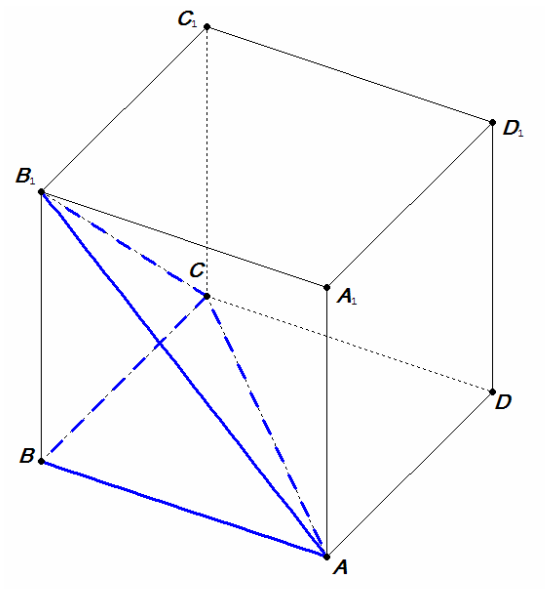

Рис. 20

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ключевая задача № 2 (теорема о трех синусах)

• Пусть в одной из граней двугранного угла, величина которого равна α, проведена прямая, составляющая с ребром двугранного угла угол β ($0^\circ < \beta < 90^\circ$), γ - величина угла между этой прямой и другой гранью. Тогда справедливо следующее соотношение:

$$\sin\gamma = \sin\alpha \sin\beta.$$

Пример 24. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями AB_1C и ABC.

Решение. Пусть α - искомый угол (рис. 20). Так как $\beta = \angle B_1AC = 60^\circ$, $\gamma = \angle B_1AB = 45^\circ$, то имеем $\sin 45^\circ = \sin\alpha \sin 60^\circ$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\alpha = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Ответ: $\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Ключевая задача № 3 (теорема о трех косинусах)

• Пусть α - величина угла между наклонной l и ее проекцией на некоторую плоскость, β - величина угла между проекцией наклонной l и прямой, проведенной через основание той же наклонной в плоскости проекции, и γ - величина угла между наклонной l и прямой, проведенной через ее основание в плоскости проекции. Тогда справедливо следующее соотношение:

$$\cos\gamma = \cos\alpha \cos\beta.$$

Пример 25. Угол между боковыми ребрами правильной четырехугольной пирамиды, не лежащими в одной грани, равен 120°. Найдите плоский угол при вершине пирамиды.

Решение. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ проведем диагональное сечение ASC (рис. 21); SD – наклонная к плоскости сечения, SO - высота пирамиды и проекция SD на эту плоскость, SC – прямая, проведенная в плоскости ASC через основание наклонной. По условию $\angle ASC = 120^\circ$.

На основании теоремы о трех косинусах имеем:

$$\cos\angle DSC = \cos\angle DSO \cdot \cos\angle CSO.$$

Отсюда

$$\cos\angle DSC = \cos 60^\circ \cdot \cos 60^\circ = \cos^2 60^\circ = \frac{1}{4},$$

$$\angle DSC = \arccos\frac{1}{4}.$$

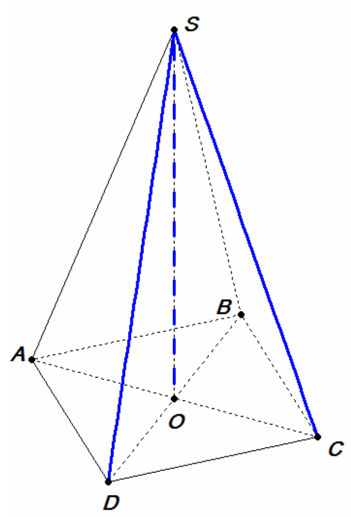

Рис. 21

Ответ: $\arccos\frac{1}{4}$.

Ключевая задача № 4 (теорема косинусов для трехгранного угла)

• Пусть для трехгранного угла плоские углы равны α, β и γ и двугранный угол при ребре, противолежащий плоскому углу γ, равен φ. Тогда справедливо следующее соотношение:

$$\cos\varphi = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}.$$

Пример 26. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AD_1 и DM, где M – середина ребра D_1C_1.

Решение. Пусть ребро куба равно 1, N – середина ребра A_1B_1, тогда искомый угол γ равен углу между AD_1 и AN (рис. 22). Используем теорему косинусов для трехгранного угла с вершиной A, в котором $\angle A_1AD_1 = \alpha$, $\angle A_1AN = \beta$, $\angle NAD_1 = \gamma$. Так как $\varphi = 90^\circ$, то имеем $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$.

Из треугольника A_1AD_1 находим $\cos\alpha = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, из треугольника A_1AN получаем $\cos\beta = \frac{AA_1}{AN} = 1 : \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Отсюда $\cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$, $\gamma = \arccos\sqrt{\frac{2}{5}}$.

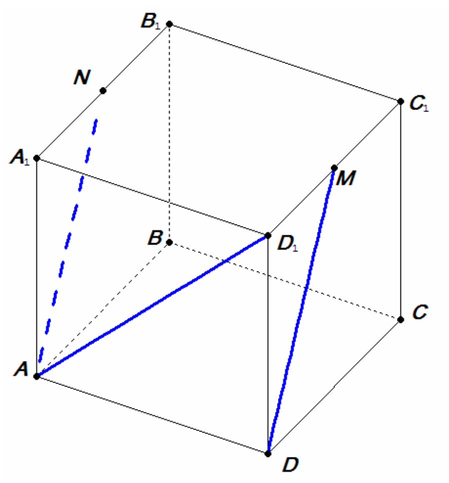

Рис. 22

Ответ: $\arccos\sqrt{\frac{2}{5}}$.

Ключевая задача № 5

• Если некоторая прямая образует углы α, β и γ с тремя попарно перпендикулярными прямыми, то $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Пример 27. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Его диагональ B_1D составляет с ребром AD угол 45°, а с ребром DC угол 60°, Найдите угол между прямыми B_1D и DD_1.

Решение. Используем соотношение $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, где $\angle ADB_1 = \alpha$, $\angle CDB_1 = \beta$, $\angle D_1DB_1 = \gamma$ (рис. 23). Получаем $\cos^2 45^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2\gamma = 1$,

$\cos^2\gamma = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, $\cos\gamma = \frac{1}{2}$, $\gamma = 60^\circ$.

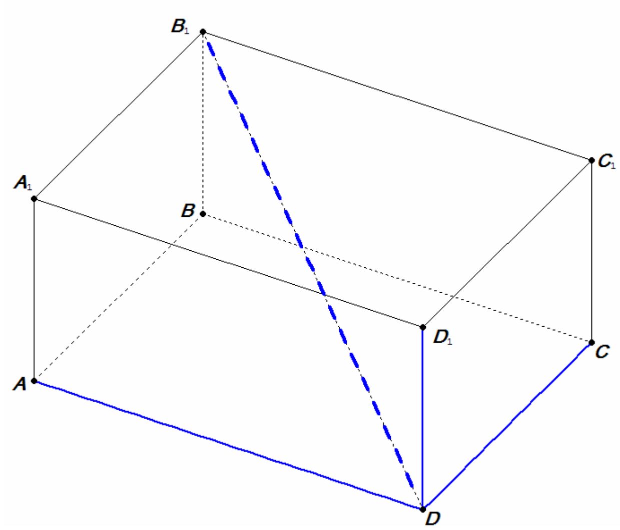

Рис. 23

Ответ: 60°.

Ключевая задача № 6

• Если AB и CD – скрещивающиеся ребра треугольной пирамиды $ABCD$, r – расстояние между ними, $AB = a$, $CD = b$, φ - угол между AB и CD, V – объем пирамиды $ABCD$, то

$$r = \frac{6V}{ab\sin\varphi}.$$

Пример 28. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между диагональю куба BD_1 и диагональю грани AB_1.

Решение. Найдем искомое расстояние по формуле $r = \frac{6V}{AB_1\cdot BD_1\sin\varphi}$, где V – объем пирамиды ABB_1D_1 (рис. 24), $AB_1 = \sqrt{2}$, $BD_1 = \sqrt{3}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ - угол между прямыми BD_1 и AB_1. Так как площадь основания ABB_1 пирамиды ABB_1D_1 равна $\frac{1}{2}$, а высота A_1D_1 равна 1, то $V = \frac{1}{6}$. Следовательно, $r = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

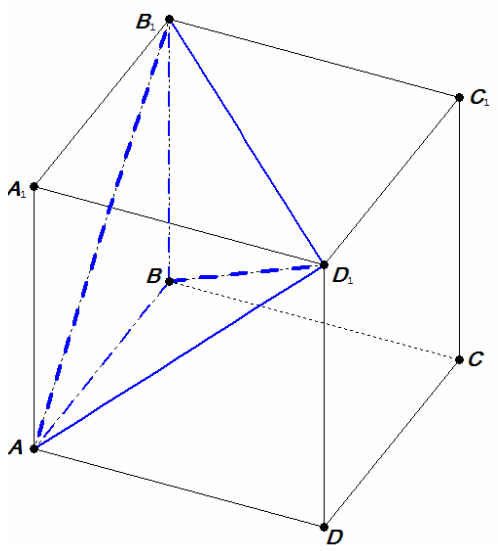

Рис. 24

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Литература

1. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ 2010: Математика /авт.-сост. И. Р. Высоцкий, Д. Д. Гущин, П. И. Захаров и др.; под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М.: АСТ: Астрель, 2009. – (Федеральный институт педагогических измерений).

2. ЕГЭ. Математика. Тематическая тетрадь. 11 класс / И. В. Ященко, С. А. Шестаков, П. И. Захаров. – М.: МЦНМО, Издательство «Экзамен», 2010.

3. Единый государственный экзамен 2010. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2010.

4. ЕГЭ 2010. Математика: Сборник тренировочных работ / Высоцкий И.Р., Захаров П.И., Панфёров В.С., Семёнов А.В., Сергеев И.Н., Смирнов В.А., Шестаков С.А., Ященко И.В. – М.: МЦНМО, 2009.

5. ЕГЭ 2010. Математика. Типовые тестовые задания /под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2010.

6. Ященко И. В., Шестаков С. А., Захаров П. И. Подготовка к ЕГЭ по математике в 2010 году. Методические указания. – М.: МЦНМО, 2009.

7. www.mathege.ru - Математика ЕГЭ 2010 (открытый банк заданий)