ЕГЭ 2012
Математика

И. В. Ященко, П. И. Захаров

Задача B8

Геометрический смысл производной

Рабочая тетрадь

учени____________________

__________класса__________

школы____________________

1 2 3 4 5 6 7 **8** 9 10 11 12 13 14

Под редакцией
А. Л. Семенова и И. В. Ященко

Разработано МИОО

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ

И. В. Ященко, П. И. Захаров

ЕГЭ 2012. Математика
Задача B8
Геометрический смысл производной

Рабочая тетрадь

Издание третье, стереотипное

Под редакцией А. Л. Семенова и И. В. Ященко

Издание соответствует брошюре
«ЕГЭ 2011. Математика. Задача B8» издательства МЦНМО

Москва
Издательство МЦНМО
2012

УДК 373:51
ББК 22.1я72
Я97

Ященко И. В., Захаров П. И.

Я97 ЕГЭ 2012. Математика. Задача B8. Геометрический смысл производной. Рабочая тетрадь / Под ред. А. Л. Семенова и И. В. Ященко. 3-е изд., стереотип. — М.: МЦНМО, 2012. — 88 с.

ISBN 978-5-94057-858-1

Рабочая тетрадь по математике серии «ЕГЭ 2012. Математика» ориентирована на подготовку учащихся старшей школы для успешной сдачи Единого государственного экзамена по математике в 2012 году. В рабочей тетради представлены задачи по одной позиции контрольных измерительных материалов ЕГЭ-2012.

На различных этапах обучения пособие поможет обеспечить уровневый подход к организации повторения, осуществить контроль и самоконтроль знаний по задачам, посвященным геометрическому смыслу производной. Рабочая тетрадь ориентирована на один учебный год, однако при необходимости позволит в кратчайшие сроки восполнить пробелы в знаниях выпускника.

Тетрадь предназначена для учащихся старшей школы, учителей математики, родителей.

Издание соответствует брошюре «ЕГЭ 2011. Математика. Задача B8» издательства МЦНМО.

ББК 22.1я72

Ященко Иван Валериевич
Захаров Петр Игоревич

ЕГЭ 2012. Математика. Задача B8. Геометрический смысл производной. Рабочая тетрадь

Под редакцией А. Л. Семенова и И. В. Ященко

Подписано в печать 25.11.2011 г. Формат 70 × 90 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 5,5. Тираж 10 000 экз. Заказ № 0399/11.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241–74–83

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами
в ЗАО «ИПК Парето-Принт», г. Тверь, www.pareto-print.ru

ISBN 978-5-94057-858-1

От редакторов серии

Прежде чем вы начнете работать с нашими тетрадями, мы хотим дать вам некоторые пояснения и советы.

Экзамен по математике в 2012 году состоит из двух частей: в первой части — 14 простых задач, в которых требуется краткий ответ (B1—B14); во второй части — 6 более сложных задач, требующих развернутого решения (C1—C6). Рабочие тетради B1—B14 организованы в соответствии со структурой первой части экзамена 2012 года и позволят вам подготовиться к выполнению всех заданий этой части, выявить и устранить пробелы в своих знаниях. К успешно зарекомендовавшей себя серии рабочих тетрадей 2011 года B1—B12 добавлены две новые тетради, соответствующие новым заданиям (по теории вероятностей и по стереометрии), и изменена нумерация остальных тетрадей.

Тем из вас, для кого главное — это набрать минимальный аттестационный балл, мы рекомендуем ориентироваться на устойчивое, безошибочное решение 8 заданий из первой части. (Хотя в реальности минимальное число заданий, которое нужно решить верно, может составить 5 или 6, но ведь вам нужно застраховаться от случайной ошибки!) Эти 8 (или больше) заданий нужно выбрать исходя из того, что вы хорошо понимаете их условия, вам знаком материал и в школе вы хорошо справлялись с аналогичными заданиями (не обязательно в курсе математики 11 класса, а на протяжении всего обучения). При этом следует в первую очередь уделять внимание тем заданиям, которые у вас уже получаются, добиваясь максимально надежного их выполнения, не ограничивая себя временем.

Те из вас, кто ориентируется на поступление в вуз, конечно, понимают, что им желательно с высокой надежностью решать все задачи части B — ведь на решение такой задачи и вписывание ответа в лист на экзамене уйдет меньше времени, чем на задачу части C, и жалко будет, если вы ошибетесь и потеряете нужный балл. Вам следует добиваться уверенного выполнения всех заданий первой части, большее внимание уделяя тем задачам, которые вызывают наибольшие затруднения. Устранение пробелов в ваших знаниях поможет вам и в работе с заданиями части C. Определив время, за которое вы можете уверенно без ошибок выполнить все задания первой части, следует планировать оставшееся время на экзамене на задания второй части.

Работу с тетрадью следует начать с выполнения диагностической работы.

Затем рекомендуется прочитать решения задач и сравнить свои решения с приведенными в книге. По тем задачам, которые вызвали затруднения, следует после повторения материала по учебнику или с учителем выполнить тематические тренинги.

Для завершающего контроля готовности к выполнению заданий соответствующей позиции ЕГЭ служат диагностические работы, приведенные в конце тетради.

Работа с серией рабочих тетрадей «ЕГЭ 2012. Математика» позволит выявить и в кратчайшие сроки ликвидировать пробелы в знаниях, но не может заменить систематического повторения (изучения) курса математики!

Желаем успеха!

Ответы:

1

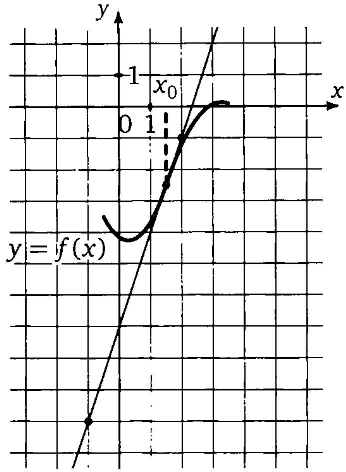
2

Образец написания:

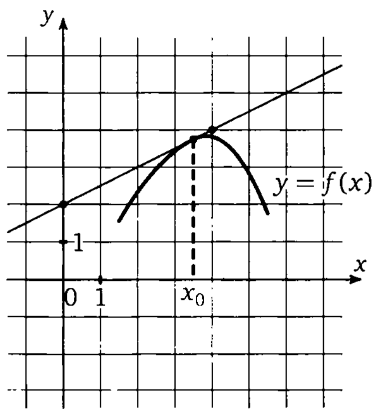
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Диагностическая работа

1. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

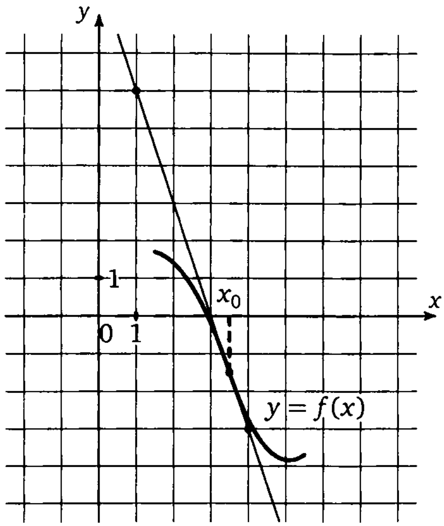


2. На рисунке изображен график движения точки по прямой. По горизонтали отложено время, по вертикали — расстояние до точки отсчета. Сколько раз за наблюдаемый период точка останавливалась?



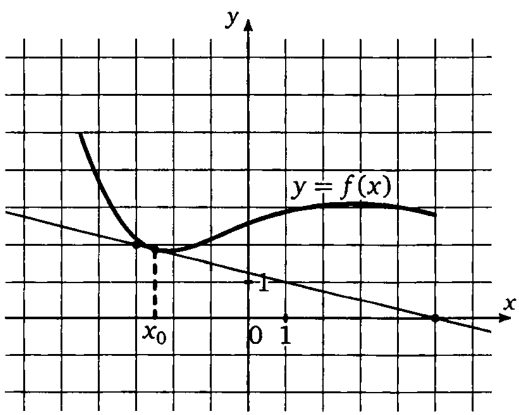
Ответы:

3. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



3

4. На рисунке изображен график движения точки по прямой. По горизонтали отложено время, по вертикали — расстояние до точки отсчета. Сколько раз за наблюдаемый период точка останавливалась?



4

Образец написания:

1234567890–,

Ответы:

5

6

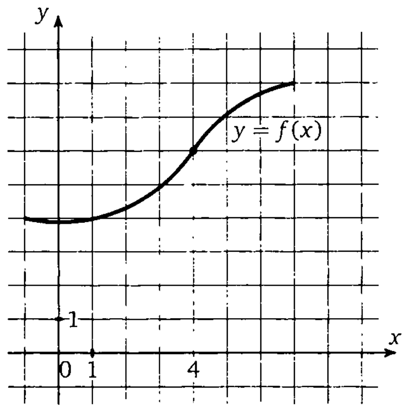
7

8

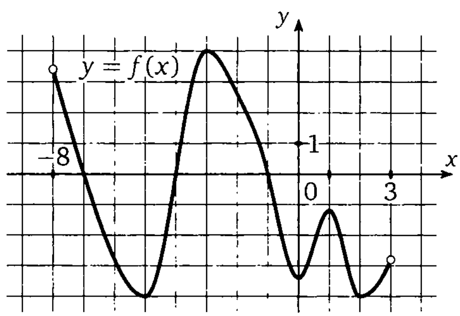
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

5. На рисунке изображен график движения точки по прямой. По горизонтали отложено время, по вертикали — расстояние до точки отсчета. Сколько раз за наблюдаемый период точка останавливалась?



6. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-8; 3)$. Определите количество целых чисел x_i, таких, что $f'(x_i)$ отрицательно.



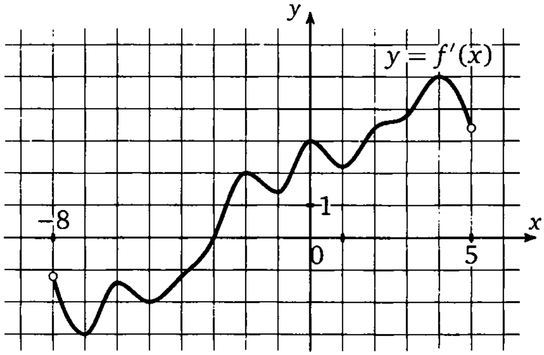
К задачам 6, 7, 8

7. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-8; 3)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.

8. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-8; 3)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 18$.

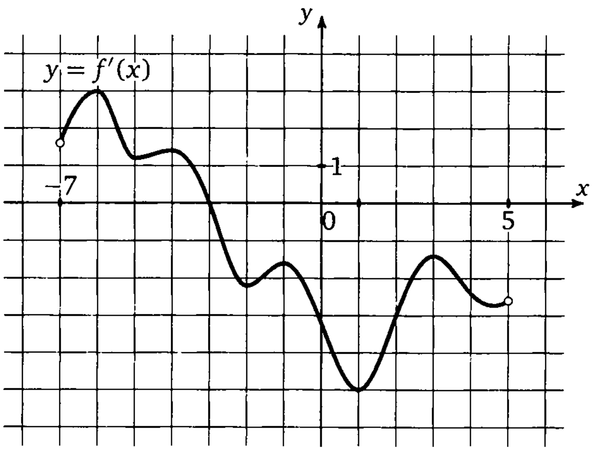
Ответы:

9. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 5)$. В какой точке отрезка $[0; 4]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



9

10. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7; 5)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-6; 4]$.



10

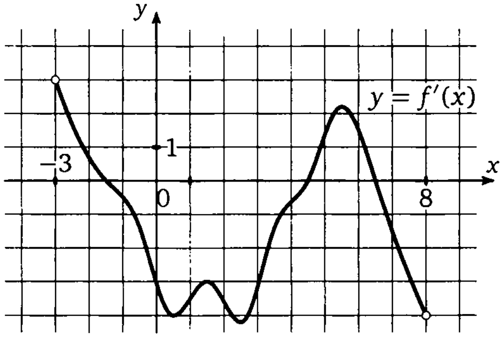
Образец написания:

1234567890–,

Ответы:

11

11. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3; 8)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-2; 7]$.



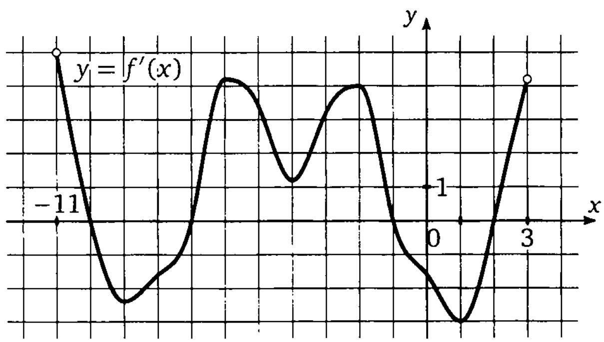
К задачам 11, 12

12

12. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3; 8)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых чисел, входящих в эти промежутки.

13

13. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-11; 3)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



К задачам 13, 14

14

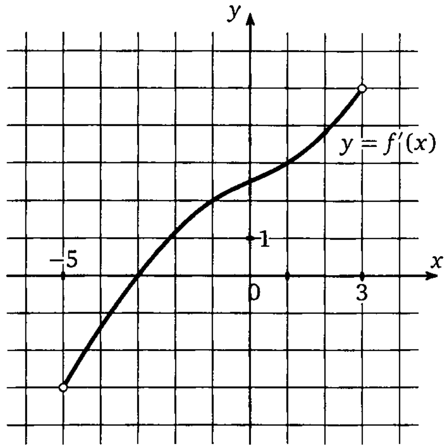
14. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-11; 3)$. Найдите количество таких чисел x_i, что касательная к графику функции $f(x)$ в точке x_i параллельна прямой $y = 3x - 11$ или совпадает с ней.

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

15. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-5; 3)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 2x + 7$ или совпадает с ней.



15

16. Прямая $y = 4x + 13$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 - 3x + 5$. Найдите абсциссу точки касания.

16

17. Прямая $y = 2x + 37$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 3x^2 - 7x + 10$. Найдите абсциссу точки касания.

17

18. Прямая $y = 3x + 1$ является касательной к графику функции $y = ax^2 + 2x + 3$. Найдите a.

18

19. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = \frac{1}{2}t^3 - 3t^2 + 2t$$

(где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость в момент времени $t = 6$ с.

19

20. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 - 5t + 3$$

(где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени ее скорость была равна 2 м/с?

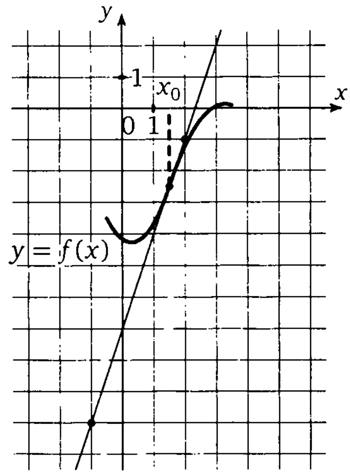
20

Образец написания:

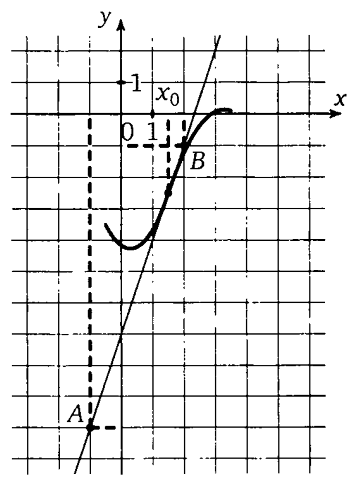
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Решение задач 1—4 диагностической работы

1. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



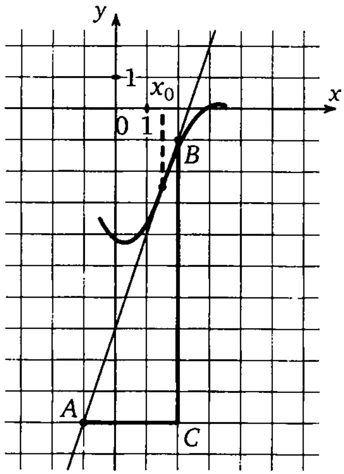
Решение. Значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 равно $\operatorname{tg}\alpha$ — угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику этой функции в данной точке. Чтобы найти угловой коэффициент, выберем две точки A и B, лежащие на



касательной, абсциссы и ординаты которых — целые числа, причем точка A расположена левее (ее абсцисса меньше).

Знак производной (углового коэффициента) можно определить по рисунку, например, так: если касательная «смотрит вверх» — точка B лежит выше точки A, — то производная положительна, если точка B ниже, то отрицательна (если касательная горизонтальна, то производная равна 0).

Теперь определим модуль углового коэффициента. Для этого построим треугольник ABC (см. рисунок).



Модуль углового коэффициента будет равен $\frac{BC}{CA}$. Найдем координаты точки A, опустив перпендикуляры на оси Ox и Oy (на рисунке показаны пунктиром). Имеем в первой задаче: $A(-1; -10)$, $B(2; -1)$ и $C(2; -10)$. Тогда длина BC равна разнице ординат точек B и C, то есть $BC = -1 - (-10) = -1 + 10 = 9$, длина AC равна разнице абсцисс точек C и A, $CA = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3$. Отсюда искомое значение производной равно $\frac{9}{3} = 3$.

Ответ: 3.

В остальных случаях вычисления проводятся аналогично.

Задача 2. *Ответ*: 0,5.

Задача 3. *Ответ*: −3.

Задача 4. *Ответ*: −0,25.

При решении этой задачи важно помнить, что тангенс острого угла прямоугольного треугольника — это отношение противолежащего катета к прилежащему, а не большего к меньшему и что производная бывает отрицательной, в отличие от тангенса острого угла прямоугольного треугольника.

При решении таких задач можно использовать следующее рассуждение.

Если уравнение касательной к графику функции в точке x_0 имеет вид $y = kx + b$, то значение производной в точке x_0 равно k.

Найдя координаты двух точек $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$, лежащих на касательной, мы можем найти k из системы уравнений

$$\begin{cases} y_a = k \cdot x_a + b, \\ y_b = k \cdot x_b + b. \end{cases}$$

Например, в задаче 3 на рисунке можно взять точки $A(1; 6)$, $B(4; -3)$ и из системы

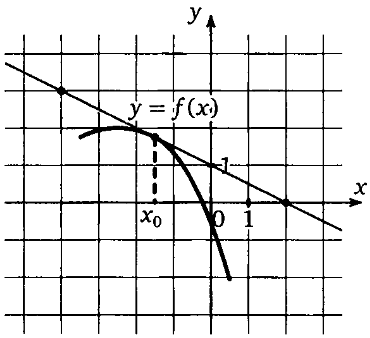
$$\begin{cases} 6 = k \cdot 1 + b, \\ -3 = k \cdot 4 + b \end{cases}$$

найти $k = -3$.

Ответы:

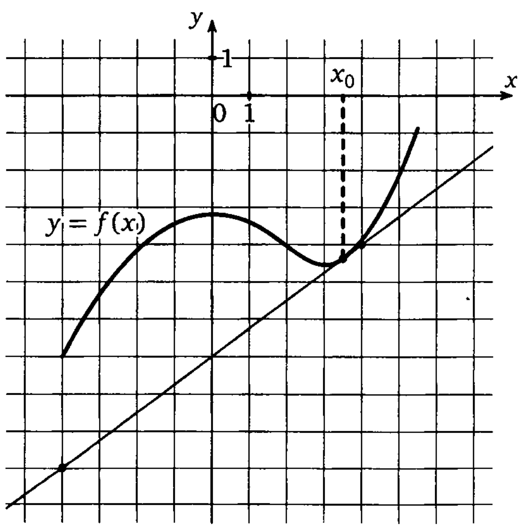
Тренировочная работа 1

T1.1. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



T1.1

T1.2. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



T1.2

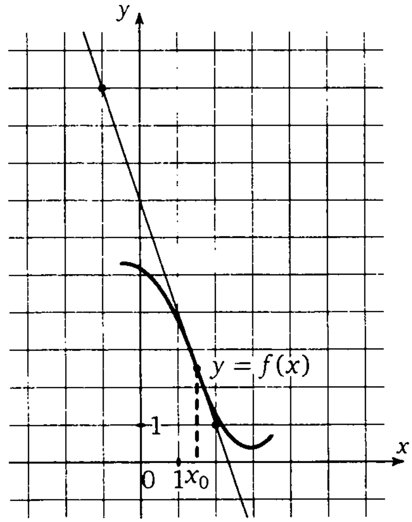
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

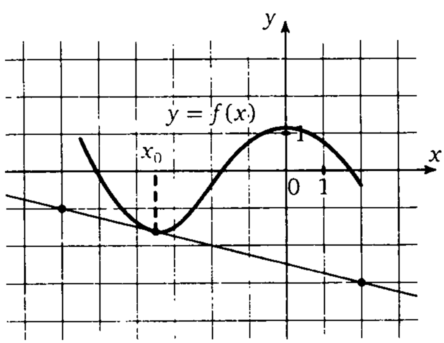
Т1.3

Т1.3. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Т1.4

Т1.4. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

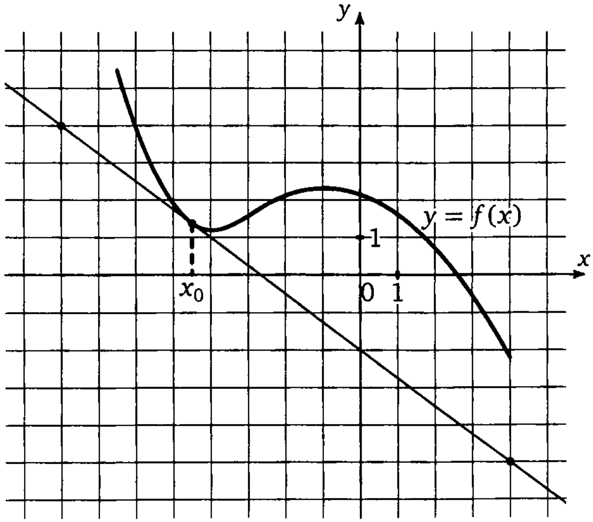


Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

T1.5. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



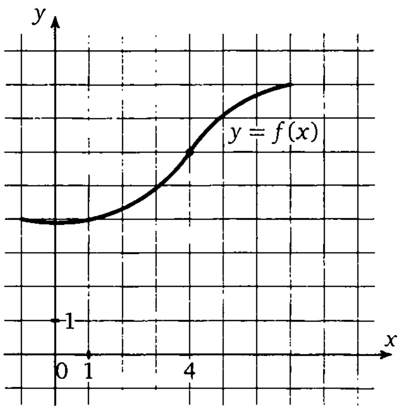
T1.5

Образец написания:

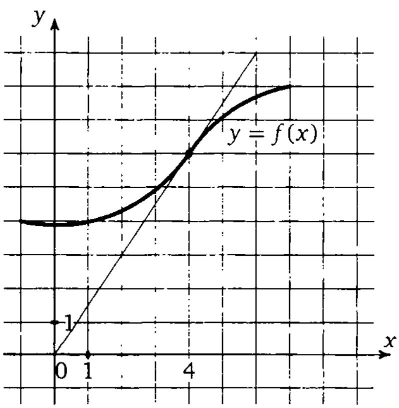
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Решение задачи 5 диагностической работы

5. На рисунке изображен график движения точки по прямой. По горизонтали отложено время, по вертикали — расстояние до точки отсчета. Сколько раз за наблюдаемый период точка останавливалась?



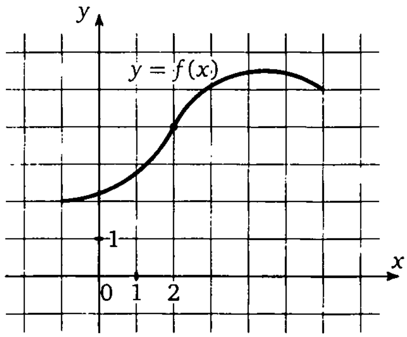
Решение. Если касательная проходит через начало координат, то можно изобразить ее на рисунке, проведя прямую через начало координат и точку касания. Далее решение задачи аналогично решению задач 1—4. В качестве точек с целочисленными координатами, лежащих на касательной, можно взять начало координат и точку касания.



Ответы:

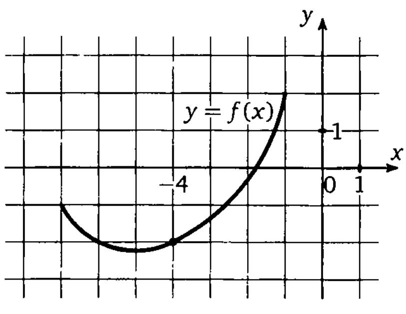
Тренировочная работа 2

Т2.1. На рисунке изображен график функции $f(x)$. Касательная к этому графику, проведенная в точке 2, проходит через начало координат. Найдите $f'(2)$.



Т2.1

Т2.2. На рисунке изображен график функции $f(x)$. Касательная к этому графику, проведенная в точке -4, проходит через начало координат. Найдите $f'(-4)$.



Т2.2

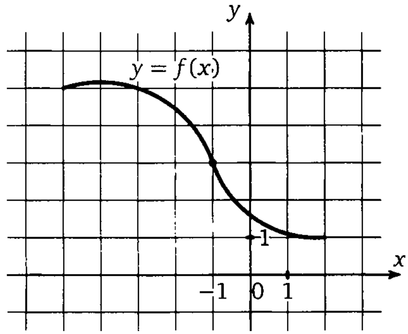
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Ответы:

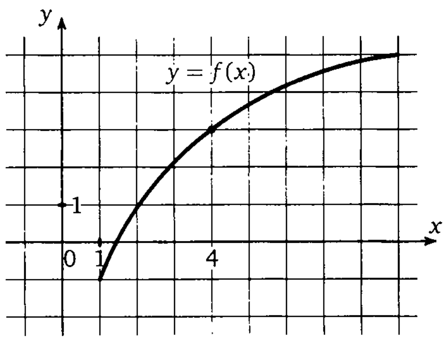
T2.3

T2.3. На рисунке изображен график функции $f(x)$. Касательная к этому графику, проведенная в точке -1, проходит через начало координат. Найдите $f'(-1)$.



T2.4

T2.4. На рисунке изображен график функции $f(x)$. Касательная к этому графику, проведенная в точке 4, проходит через начало координат. Найдите $f'(4)$.

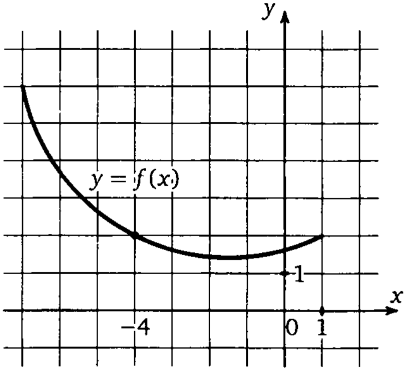


Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

T2.5. На рисунке изображен график функции $f(x)$. Касательная к этому графику, проведенная в точке -4, проходит через начало координат. Найдите $f'(-4)$.



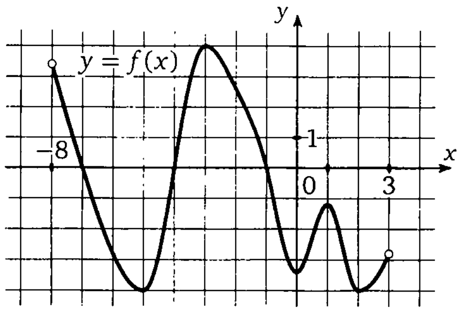
T2.5

Образец написания:

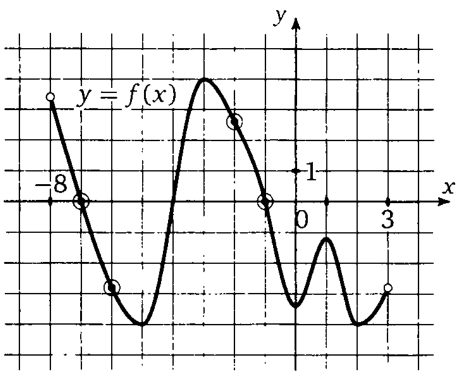
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Решение задачи 6 диагностической работы

6. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-8; 3)$. Определите количество целых чисел x_i, таких, что $f'(x_i)$ отрицательно.



Решение. Решим эту задачу, воспользовавшись следующим утверждением. Производная непрерывно дифференцируемой функции на промежутке убывания (возрастания) не положительна (не отрицательна). Значит необходимо выделить промежутки убывания функции и сосчитать количество целых чисел, принадлежащих этим промежуткам. Причем производная равна нулю на концах этих промежутков, значит, нужно брать только внутренние точки промежутков.

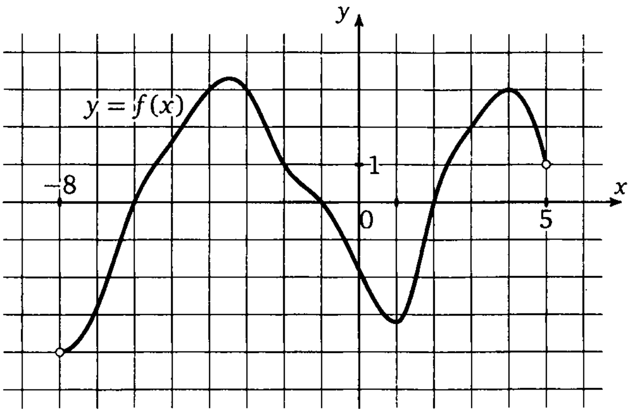


При решении этой задачи важно не ошибиться в том, какие мы точки ищем, с положительной производной или с отрицательной, для этого можно в условии задачи подчеркнуть соответствующее слово.

Ответы:

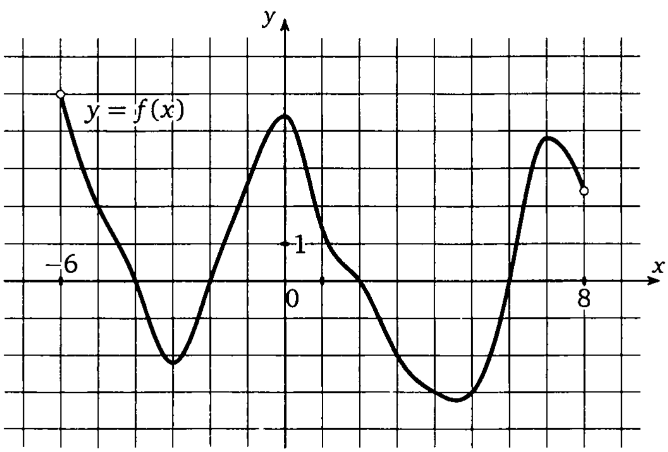
Тренировочная работа 3

Т3.1. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-8; 5)$. Определите количество целых чисел x_i, таких, что $f'(x_i)$ отрицательно.



Т3.1

Т3.2. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-6; 8)$. Определите количество целых чисел x_i, таких, что $f'(x_i)$ отрицательно.



Т3.2

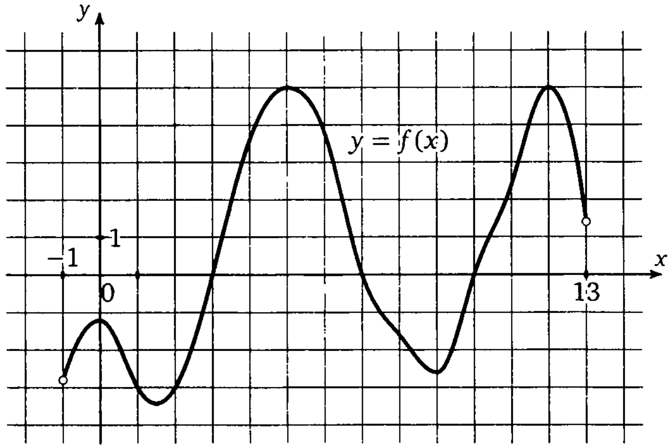
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

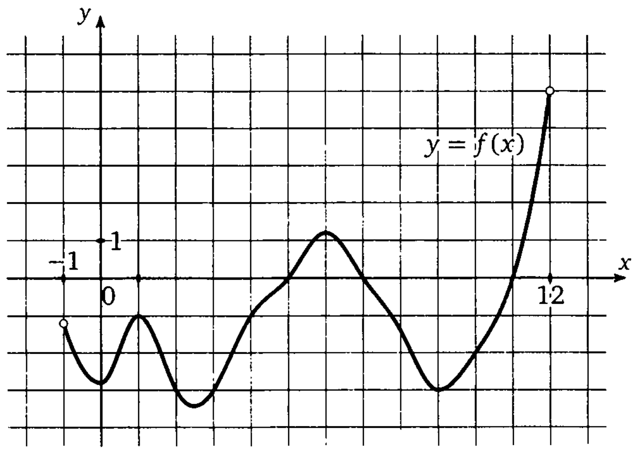
Т3.3

Т3.3. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-1; 13)$. Определите количество целых чисел x_i, таких, что $f'(x_i)$ отрицательно.



Т3.4

Т3.4. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-1; 12)$. Определите количество целых чисел x_i, таких, что $f'(x_i)$ отрицательно.

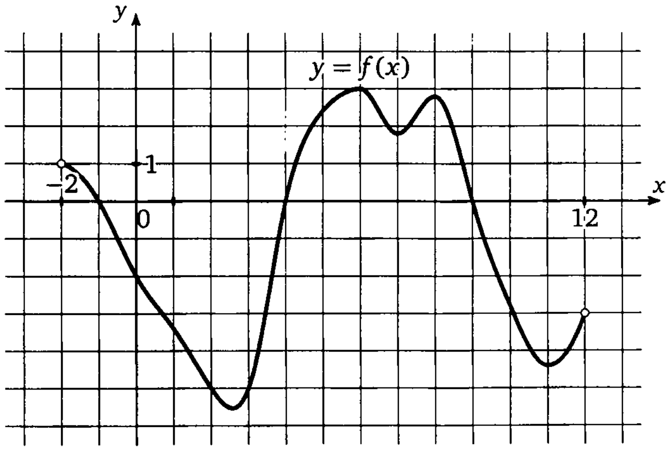


Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

Т3.5. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-2; 12)$. Определите количество целых чисел x_i, таких, что $f'(x_i)$ отрицательно.



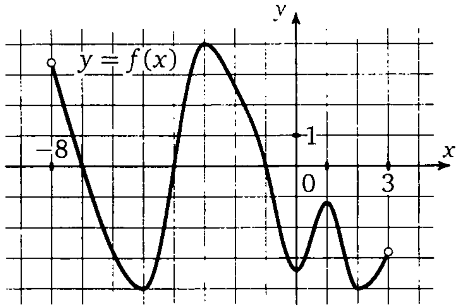
Т3.5

Образец написания:

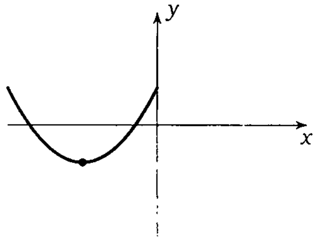
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

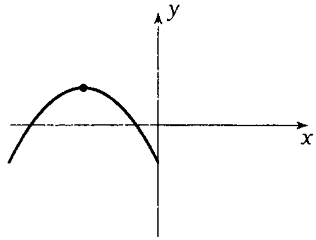
Решение задачи 7 диагностической работы

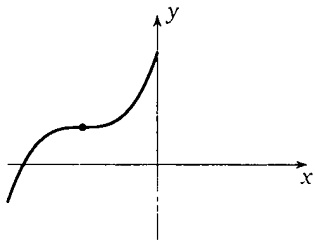
7. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-8; 3)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



Решение. Возможны три различные «картинки» (формально говоря, в окрестности изолированного нуля производной, но только такие случаи и рассматриваются в школьном курсе и могут встретиться на экзамене).

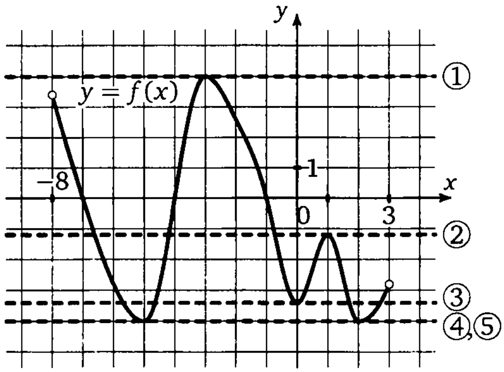






В нашем случае третий вариант не встречается, поэтому отметим на рисунке все места, где встречаются первые два варианта, и сосчитаем их количество.

Производная функции в точке x_0 равна 0 тогда и только тогда, когда касательная к графику функции, проведенная в точке с абсциссой x_0, горизонтальна. Отсюда следует другой способ решения задачи — приложить линейку или край листа бумаги к рисунку сверху горизонтально (на рисунке показано пунктиром) и, двигая «вниз», сосчитать количество точек с горизонтальной касательной.



Если перед нами график прямолинейного движения, то вопрос задачи приобретает физический смысл, ведь значение производной в точке будет мгновенной скоростью, а точка, в которой производная равна нулю, соответственно точкой остановки.

Если перед нами график прямолинейного движения, то вопрос задачи приобретает практический смысл, ведь значение производной в точке будет мгновенной скоростью, а точка, в которой производная равна нулю, соответственно точкой остановки.

Ответы:

T4.1

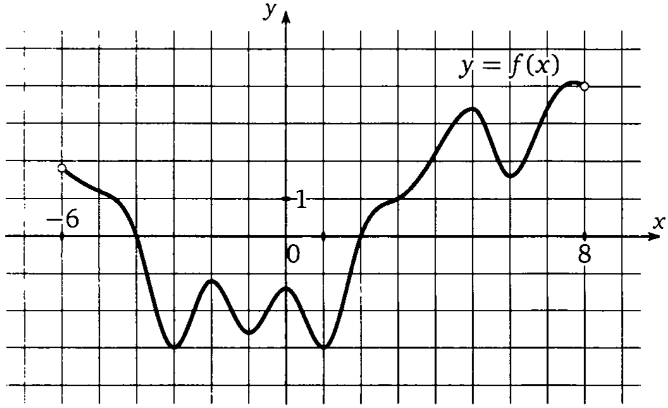
T4.2

Образец написания:

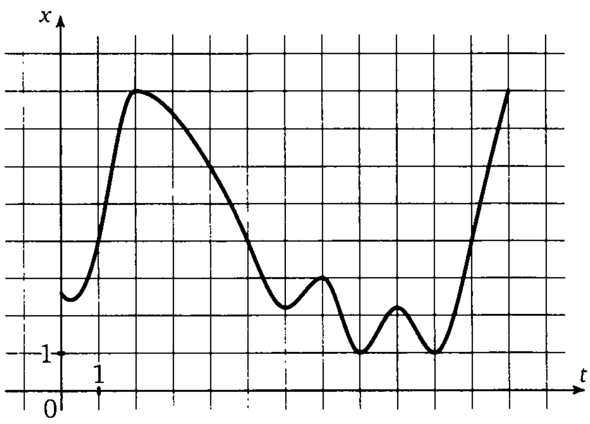
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Тренировочная работа 4

T4.1. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-6; 8)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.

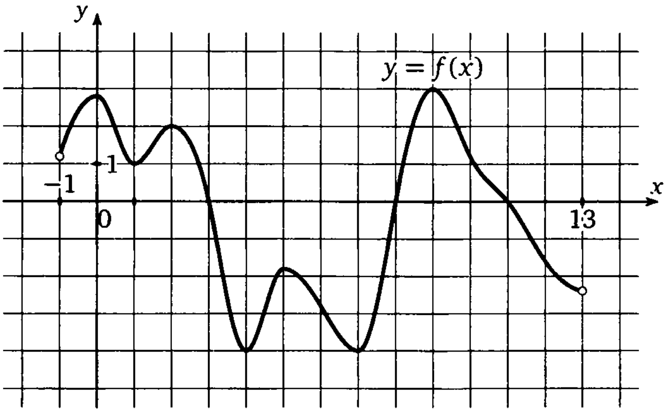


T4.2. На рисунке изображен график движения точки по прямой. По горизонтали отложено время, по вертикали — расстояние до точки отсчета. Сколько раз за наблюдаемый период точка останавливалась?



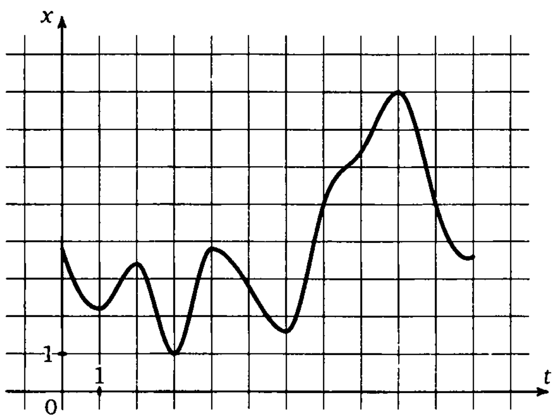
Ответы:

Т4.3. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-1; 13)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



Т4.3

Т4.4. На рисунке изображен график движения точки по прямой. По горизонтали отложено время, по вертикали — расстояние до точки отсчета. Сколько раз за наблюдаемый период точка останавливалась?



Т4.4

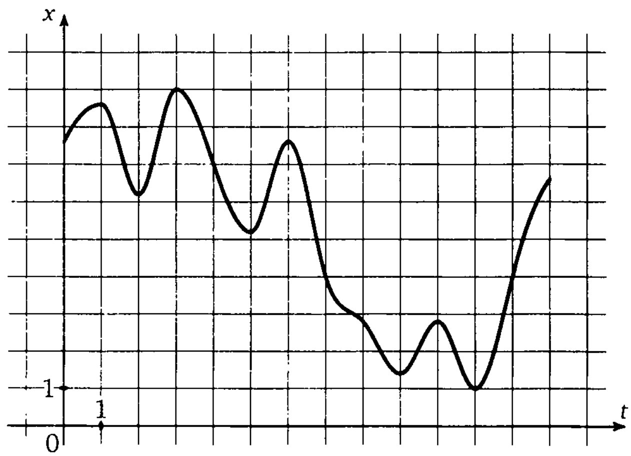
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

Т4.5

Т4.5. На рисунке изображен график движения точки по прямой. По горизонтали отложено время, по вертикали — расстояние до точки отсчета. Сколько раз за наблюдаемый период точка останавливалась?

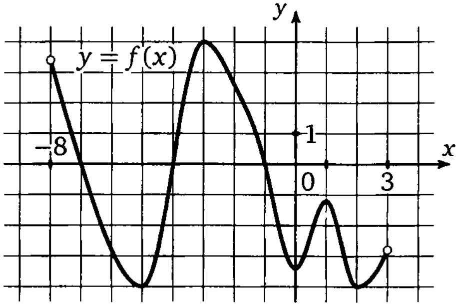


Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Решение задачи 8 диагностической работы

8. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-8; 3)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 18$.



Решение. Прямая $y = 18$ — горизонтальная, значит, если касательная к графику функции ей параллельна, то она тоже горизонтальна. Следовательно, при решении этой задачи можно воспользоваться вторым решением задачи 7, то есть приложить линейку или край листа бумаги горизонтально и, двигая его «вниз», сосчитать количество точек с горизонтальной касательной.

Ответы:

Т5.1

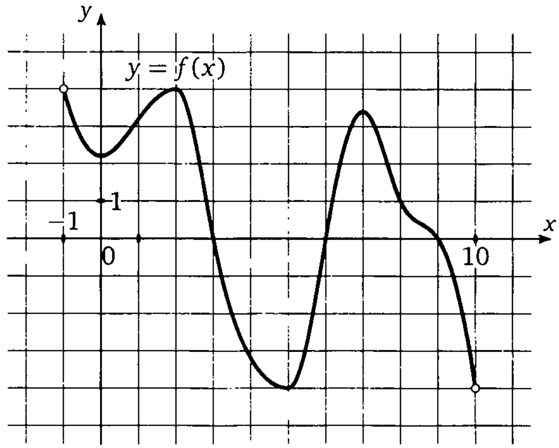
Т5.2

Образец написания:

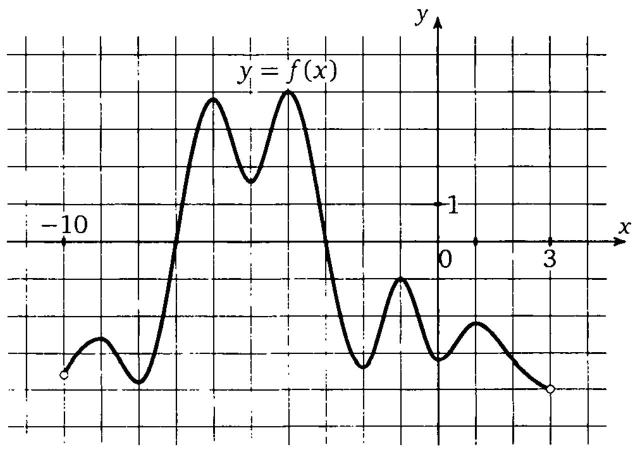
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Тренировочная работа 5

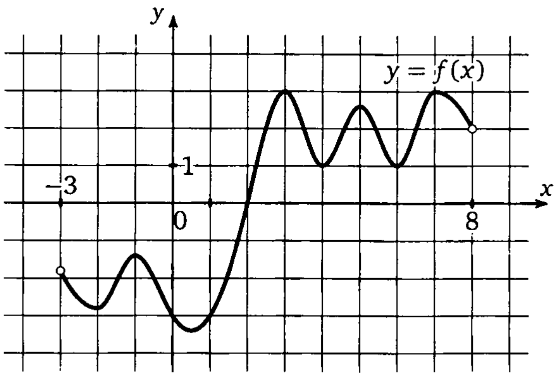
Т5.1. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-1; 10)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -3$.



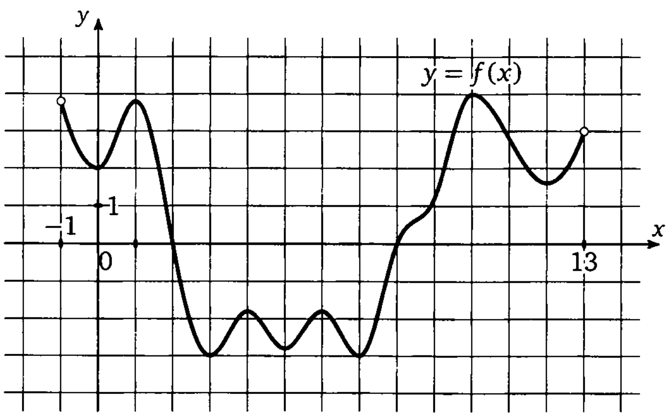
Т5.2. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-10; 3)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -3$.



Т5.3. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-3; 8)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -20$.



Т5.4. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-1; 13)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 20$.



Ответы:

Т5.3

Т5.4

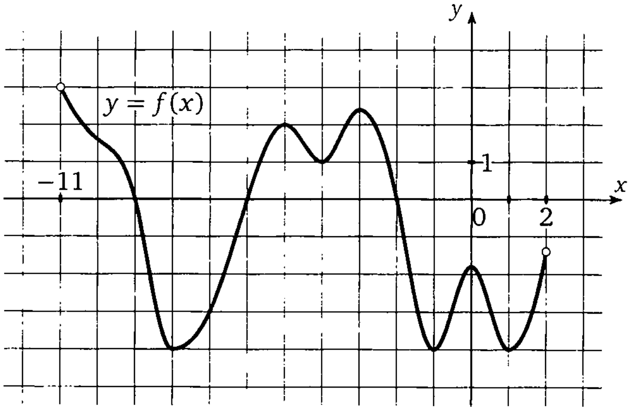
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

T5.5

T5.5. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-11; 2)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -6$.

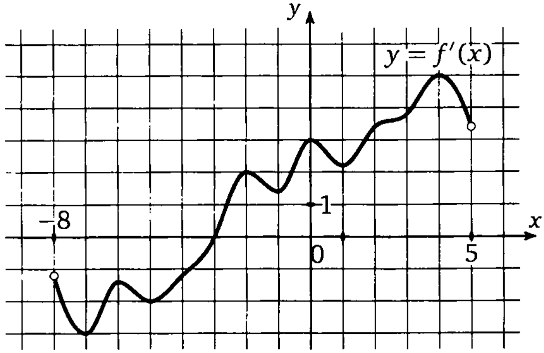


Образец написания:

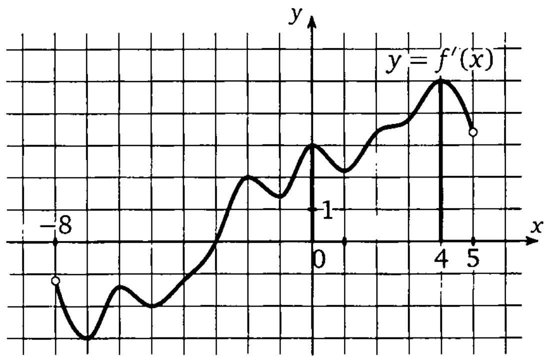
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Решение задачи 9 диагностической работы

9. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 5)$. В какой точке отрезка $[0; 4]$ $f(x)$ принимает наименьшее значение?



Решение. Для начала отметим на рисунке границы отрезка, о котором идет речь в условии задачи.



Заметим, что на этом отрезке производная функции положительна, значит, сама функция $f(x)$ возрастает, а значит, наименьшее значение на этом отрезке она принимает в левом конце отрезка, то есть в точке 0 (отметим, что при этом производная на этом отрезке, как видно из графика, принимает наименьшее значение в точке 1).

В этой задаче особенно важно внимательно прочитать условие. На рисунке изображен график производной, это слово при решении задачи можно специально подчеркнуть в условии для того, чтобы не запутаться.

Ответы:

Т6.1

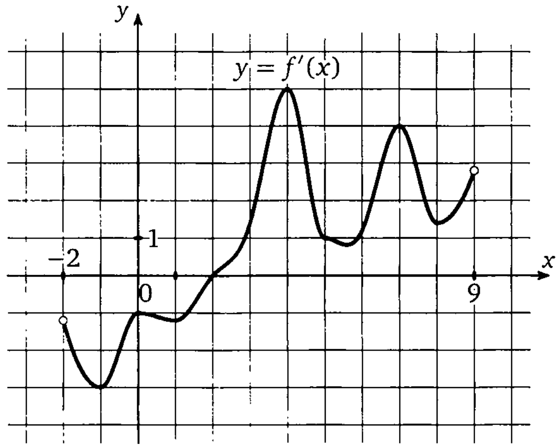
Т6.2

Образец написания:

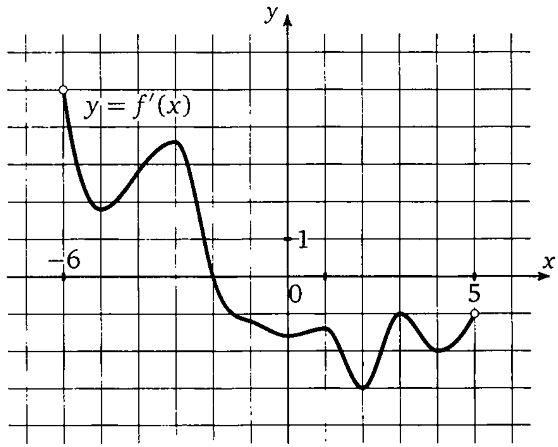
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Тренировочная работа 6

Т6.1. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2; 9)$. В какой точке отрезка $[3; 8]$ $f(x)$ принимает наименьшее значение?

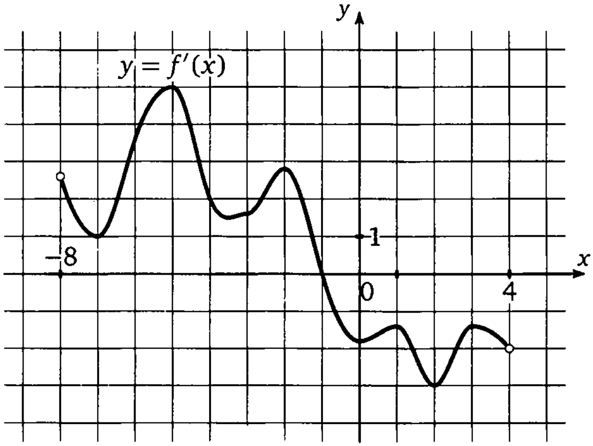


Т6.2. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6; 5)$. В какой точке отрезка $[-1; 4]$ $f(x)$ принимает наименьшее значение?



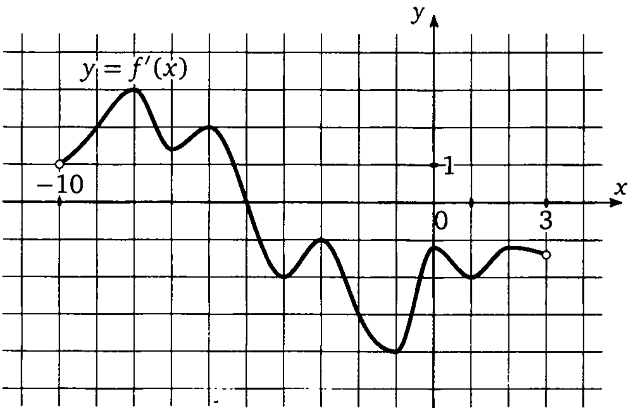
Ответы:

Т6.3. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 4)$. В какой точке отрезка $[-7; -2]$ $f(x)$ принимает наибольшее значение?



Т6.3

Т6.4. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10; 3)$. В какой точке отрезка $[-4; -1]$ $f(x)$ принимает наибольшее значение?



Т6.4

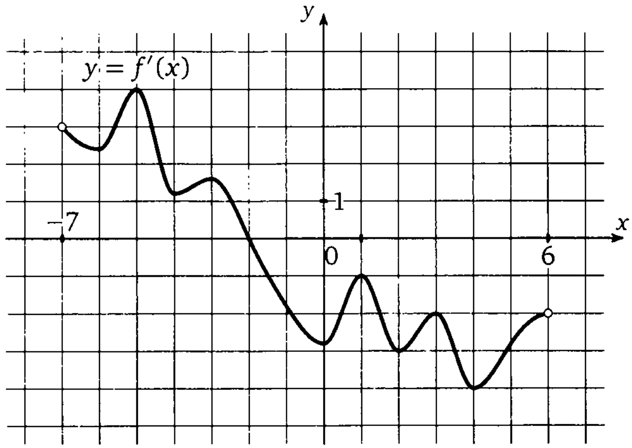
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

Т6.5

Т6.5. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7; 6)$. В какой точке отрезка $[-1; 5]$ $f(x)$ принимает наименьшее значение?

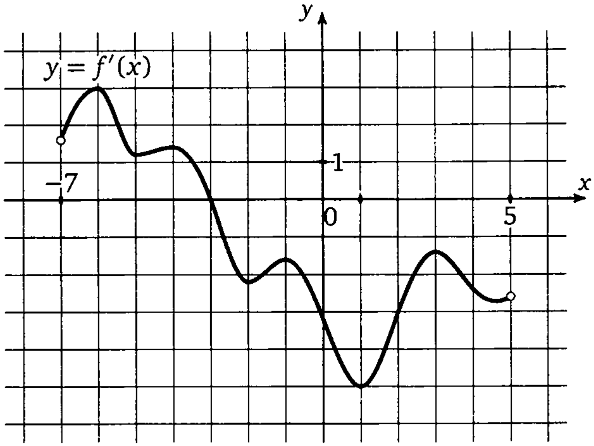


Образец написания:

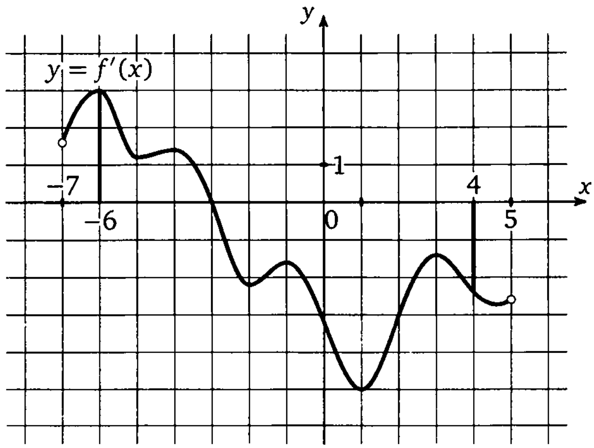
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Решение задачи 10 диагностической работы

10. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7; 5)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-6; 4]$.



Решение. Для начала отметим на рисунке границы отрезка, о котором идет речь в условии задачи.



Заметим, что на этом отрезке производная функции один раз обращается в 0 (в точке -3) и при переходе через эту точку меняет знак, откуда ясно, что точка -3 и есть искомая точка экстремума функции на отрезке.

Ответы:

T7.1

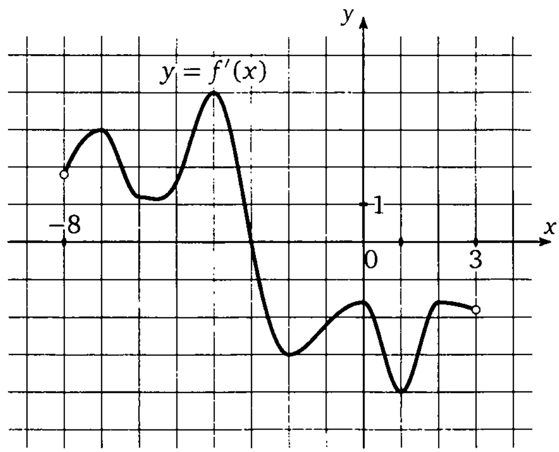
T7.2

Образец написания:

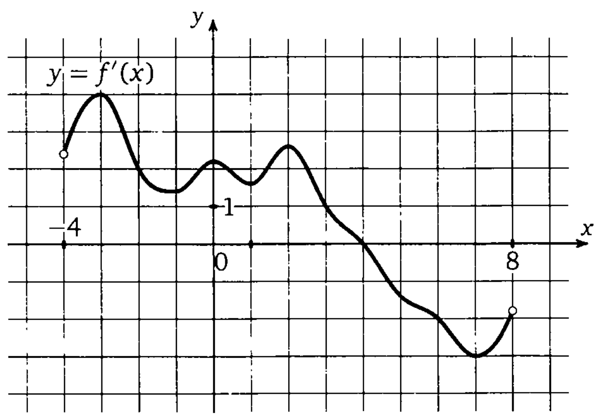
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Тренировочная работа 7

T7.1. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 3)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-6; 1]$.

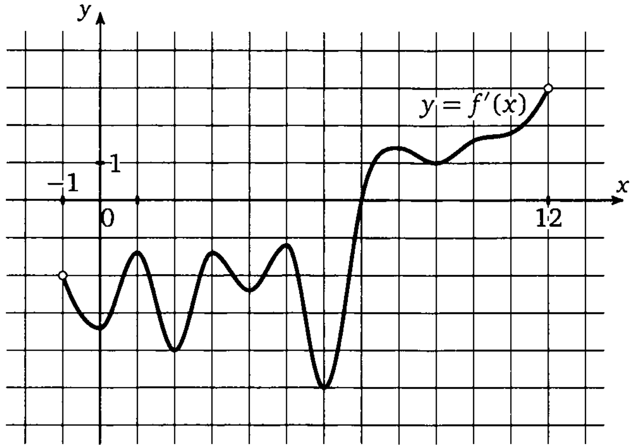


T7.2. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-4; 8)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-2; 6]$.



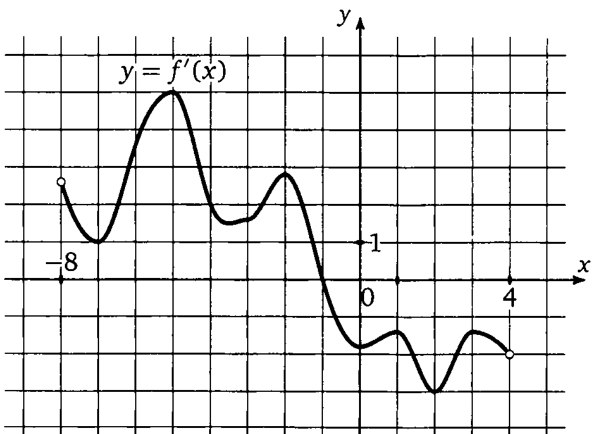
Ответы:

Т7.3. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-1; 12)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[0; 9]$.



Т7.3

Т7.4. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 4)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-5; 3]$.



Т7.4

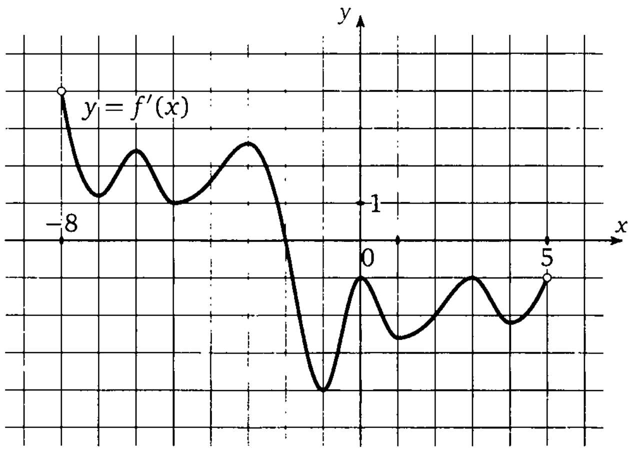
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 − ,

Ответы:

Т7.5

Т7.5. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 5)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-7; 0]$.

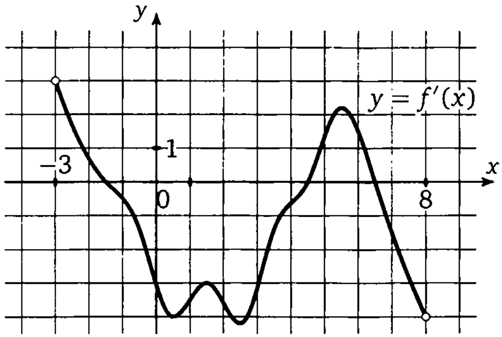


Образец написания:

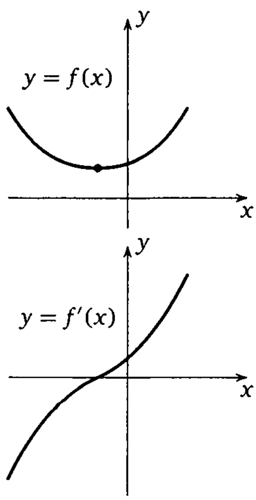
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 − ,

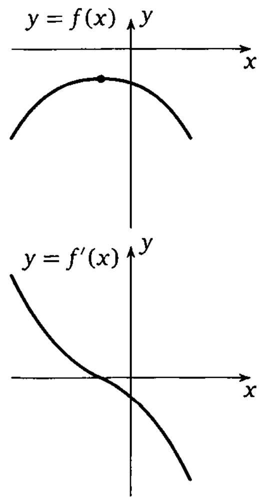
Решение задачи 11 диагностической работы

11. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3; 8)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-2; 7]$.



Решение. В точке максимума производная функции равна 0 либо не существует. Видно, что таких точек принадлежащих отрезку $[-2; 7]$ три: $-1{,}5$; $4{,}5$; $6{,}5$. При этом в точке $4{,}5$ производная слева отрицательна, а справа положительна — это точка минимума (см. рисунок слева).





В точках $-1{,}5$ и $6{,}5$ производная меняет знак с «+» на «−» — это точки максимума (см. рисунок справа).

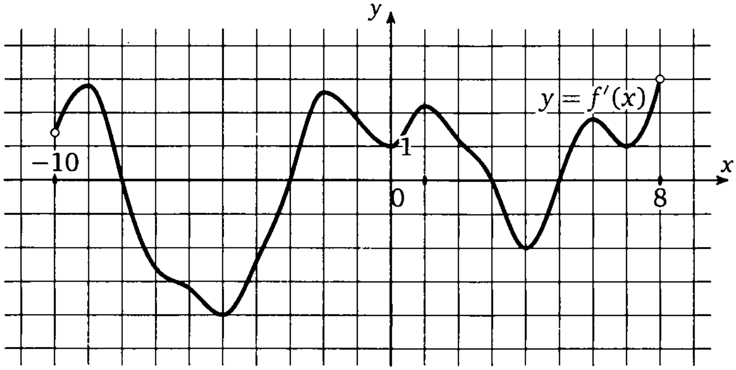
Решение задачи 11 диагностической работы

При решении этой задачи помимо того, что необходимо обратить особое внимание на то, что это график производной и точки максимума ищутся не на всей области определения, а на отрезке, нужно еще особо отметить, что ищутся именно точки максимума, а не минимума или экстремума.

Ответы:

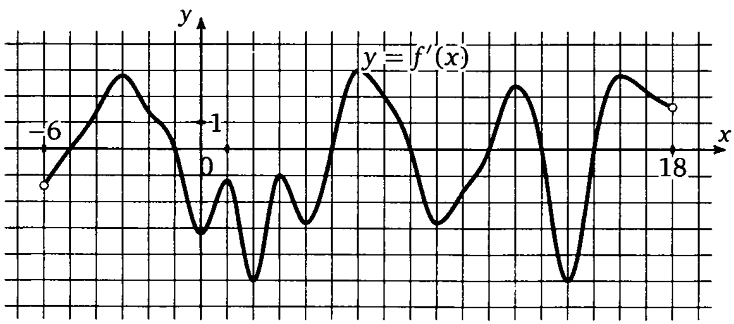
Тренировочная работа 8

Т8.1. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10; 8)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-9; 7]$.



Т8.1

Т8.2. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6; 18)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-5; 17]$.



Т8.2

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

T8.3

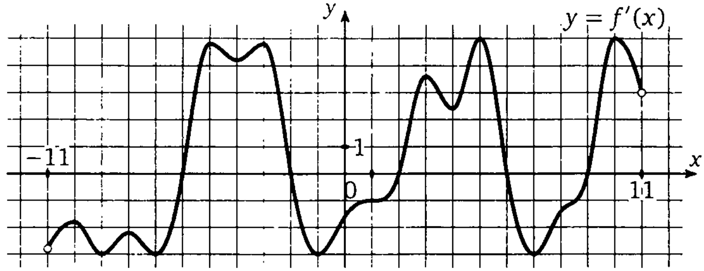
T8.4

T8.5

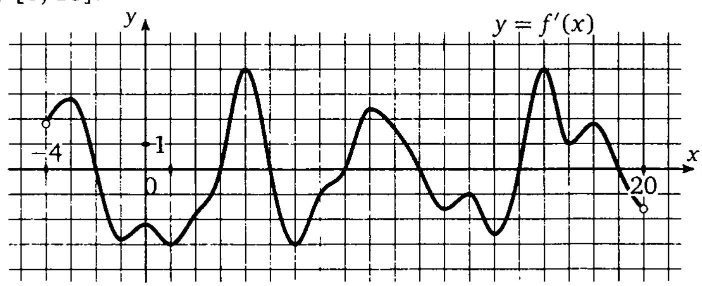
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

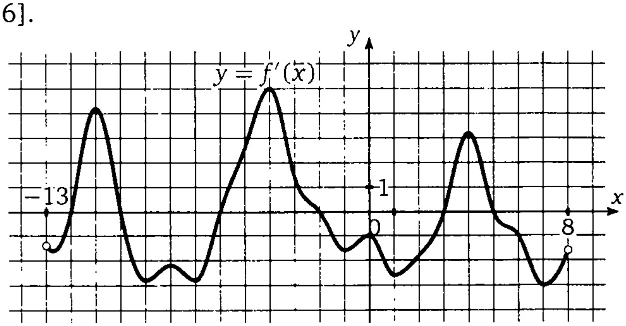
T8.3. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-11; 11)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-9; 10]$.



T8.4. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-4; 20)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[0; 18]$.

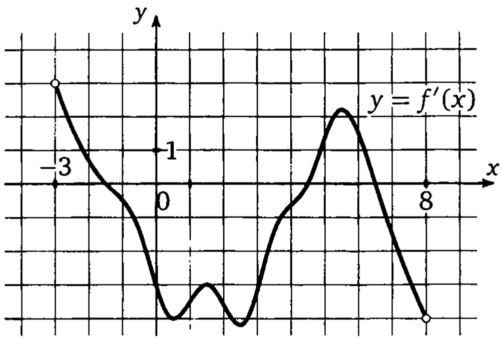


T8.5. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-13; 8)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-8; 6]$.



Решение задачи 12 диагностической работы

12. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3; 8)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых чисел, входящих в эти промежутки.



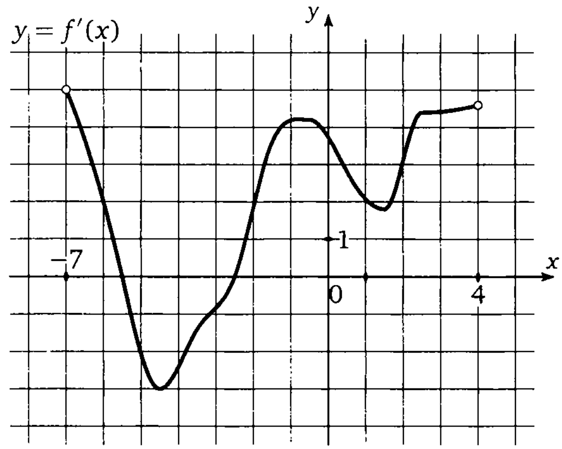
Решение. Отметим, что на всем промежутке убывания функции $f(x)$ ее производная неположительна (на промежутках возрастания соответственно неотрицательна). У нас таких промежутков два: $(-1{,}5; 4{,}5)$ и $(6{,}5; 8)$, целые числа, входящие в эти промежутки, — это $-1; 0; 1; 2; 3; 4; 7$, то есть искомая сумма равна $-1+0+1+2+3+4+7=16$.

Ответы:

Тренировочная работа 9

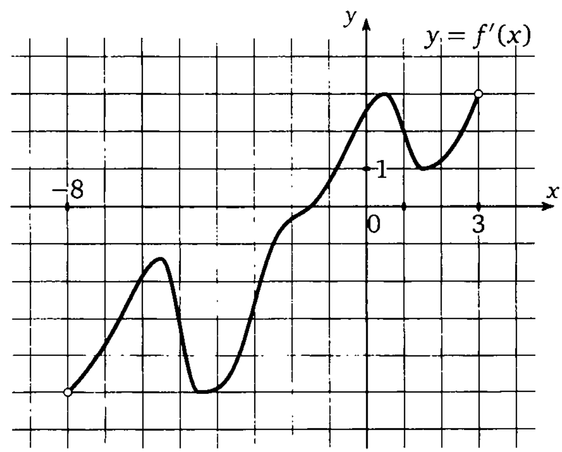
T9.1

T9.1. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7; 4)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых чисел, входящих в эти промежутки.



T9.2

T9.2. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 3)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых чисел, входящих в эти промежутки.

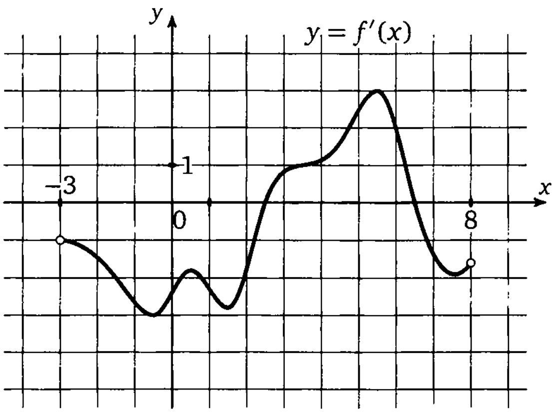


Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

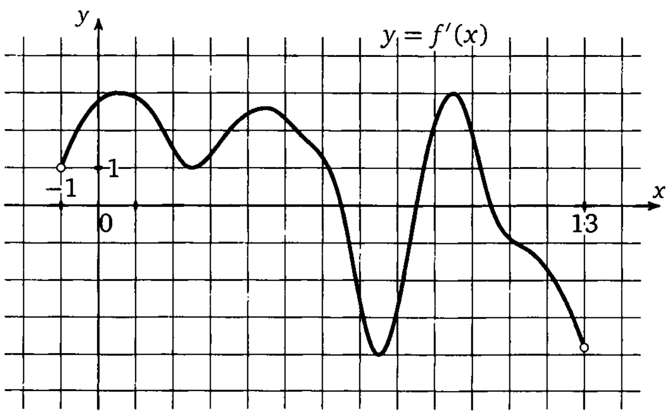
Ответы:

T9.3. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3; 8)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых чисел, входящих в эти промежутки.



T9.3

T9.4. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-1; 13)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых чисел, входящих в эти промежутки.



T9.4

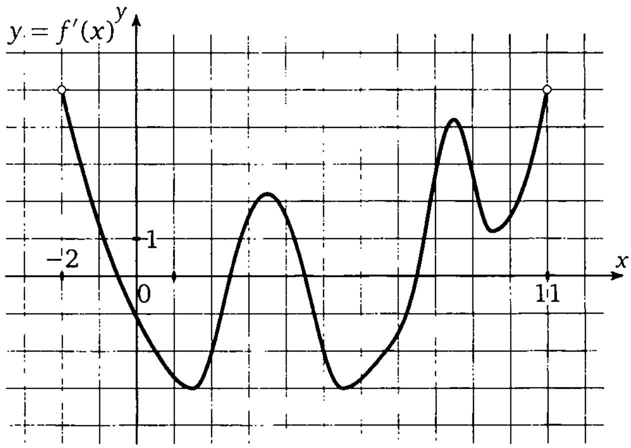
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

T9.5

T9.5. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2; 11)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых чисел, входящих в эти промежутки.

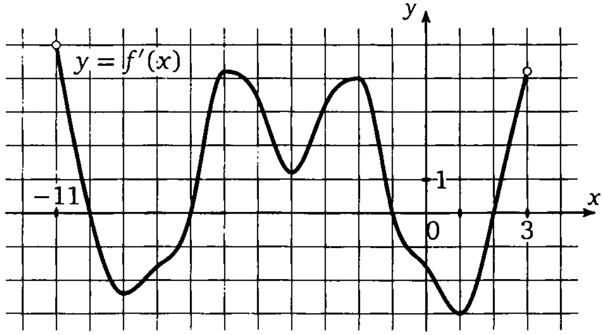


Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Решение задачи 13 диагностической работы

13. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-11; 3)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



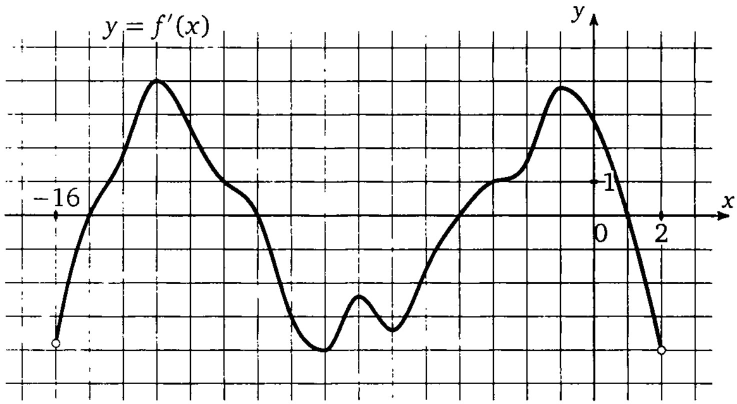
Решение. В этой задаче, как и в задаче 12, необходимо сначала найти промежутки возрастания функции. В нашем случае их 3: $(-11; -10)$, $(-7; -1)$ и $(2; 3)$, наибольшую длину из них, очевидно, имеет промежуток $(-7; -1)$, его длина равна $-1-(-7)=6$.

Ответы:

Тренировочная работа 10

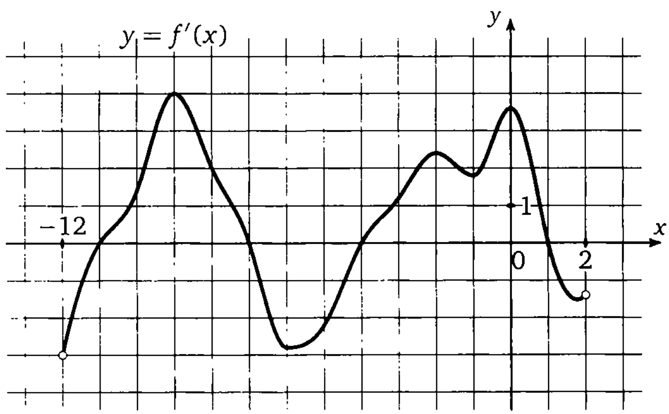
T10.1

T10.1. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-16; 2)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



T10.2

T10.2. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-12; 2)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

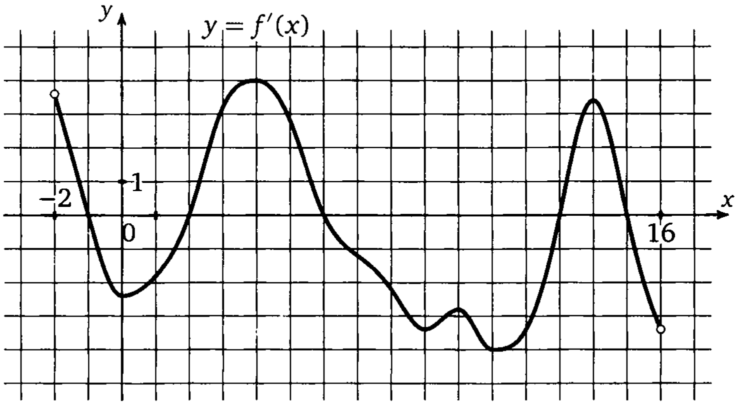


Образец написания:

1234567890-,

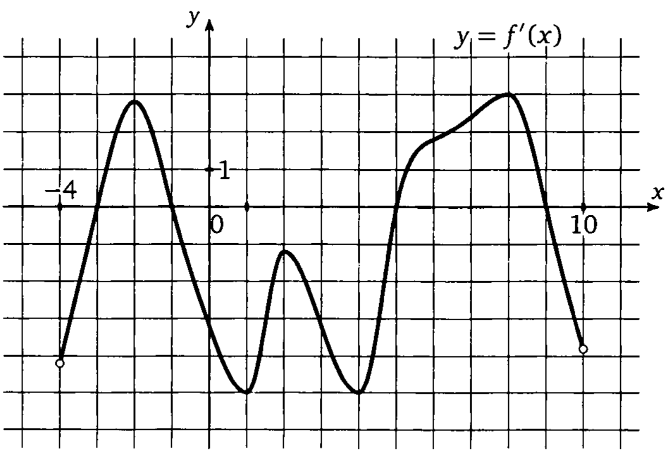
Ответы:

Т10.3. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2; 16)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



Т10.3

Т10.4. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-4; 10)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



Т10.4

Образец написания:

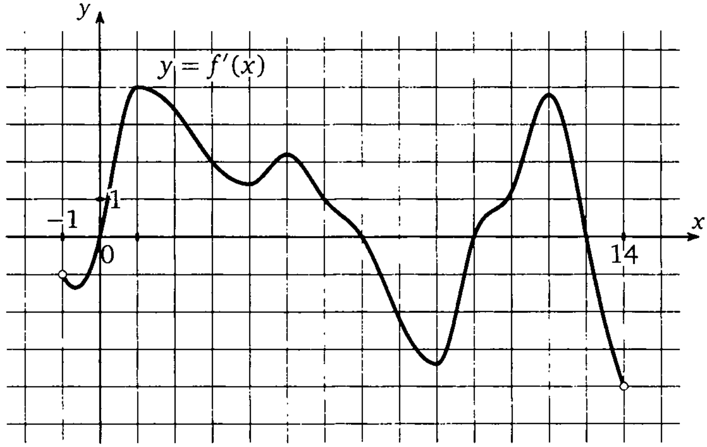
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

T10.5

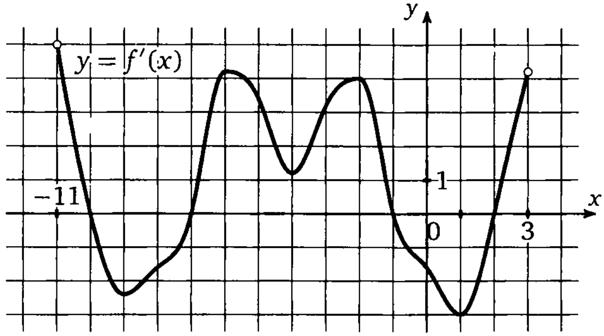
Образец написания:

T10.5. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-1; 14)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

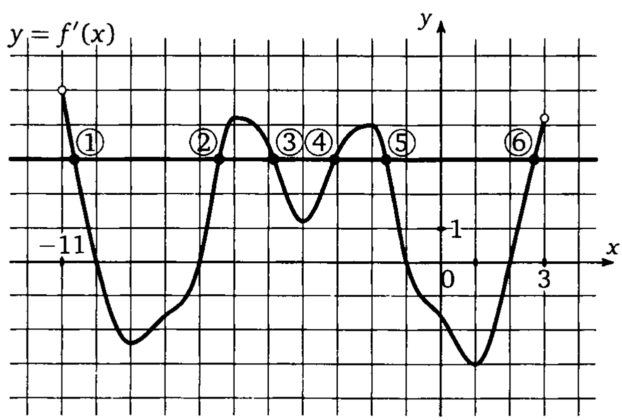


Решение задачи 14 диагностической работы

14. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-11; 3)$. Найдите количество таких чисел x_i, что касательная к графику функции $f(x)$ в точке x_i параллельна прямой $y = 3x - 11$ или совпадает с ней.



Решение. Если касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 3x - 11$ или совпадает с ней, то ее угловой коэффициент равен 3, а значит нам нужно найти количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 3. Для этого на графике производной проведем горизонтальную черту, соответствующую значению $y = 3$, и посчитаем количество точек графика производной, лежащих на этой линии. В нашем случае таких точек 6.

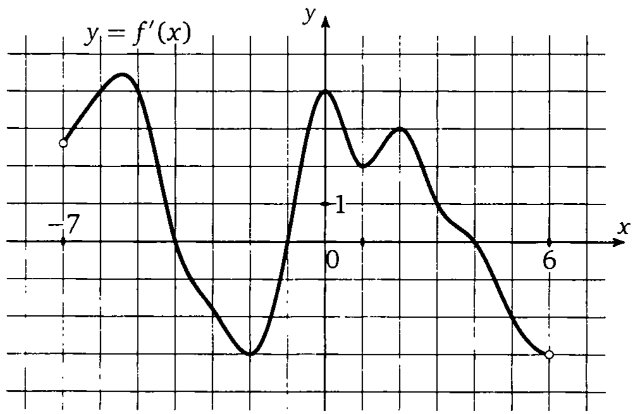


Ответы:

Тренировочная работа 11

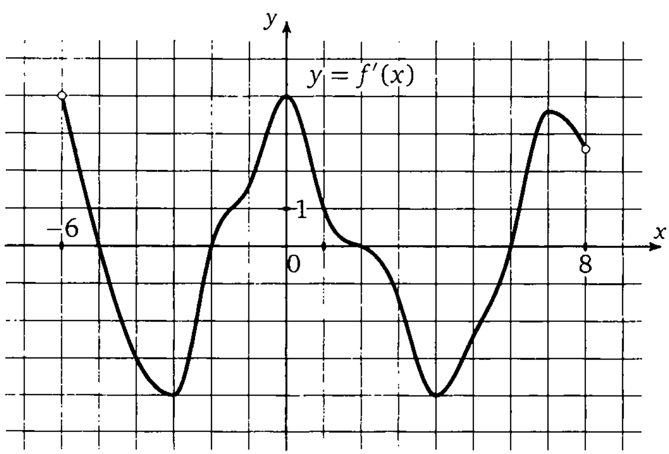
Т11.1

Т11.1. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7; 6)$. Найдите количество таких чисел x_i, что касательная к графику функции $f(x)$ в точке x_i параллельна прямой $y = x - 7$ или совпадает с ней.



Т11.2

Т11.2. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6; 8)$. Найдите количество таких чисел x_i, что касательная к графику функции $f(x)$ в точке x_i параллельна прямой $y = 2x - 5$ или совпадает с ней.

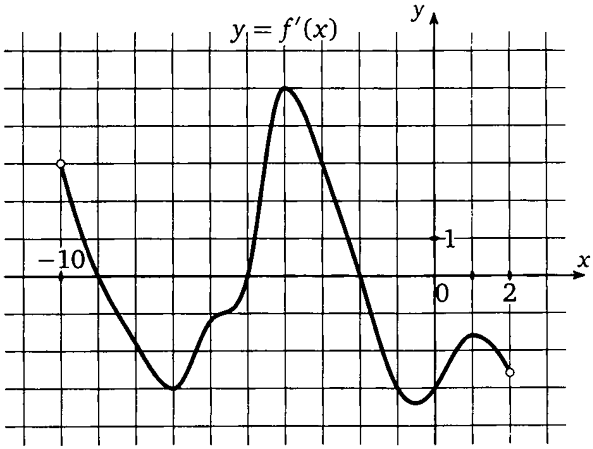


Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

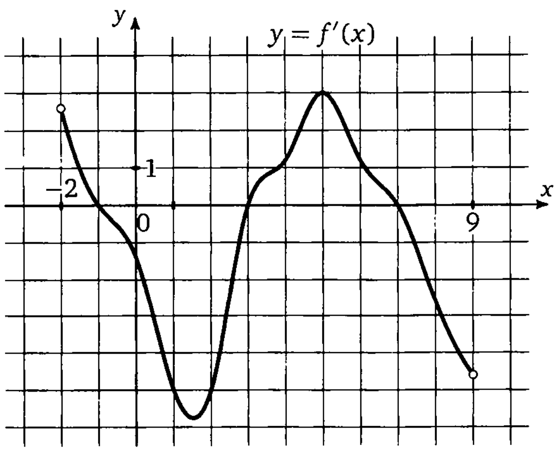
Ответы:

Т11.3. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10; 2)$. Найдите количество таких чисел x_i, что касательная к графику функции $f(x)$ в точке x_i параллельна прямой $y = -2x - 11$ или совпадает с ней.



Т11.3

Т11.4. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2; 9)$. Найдите количество таких чисел x_i, что касательная к графику функции $f(x)$ в точке x_i параллельна прямой $y = -3x - 2$ или совпадает с ней.



Т11.4

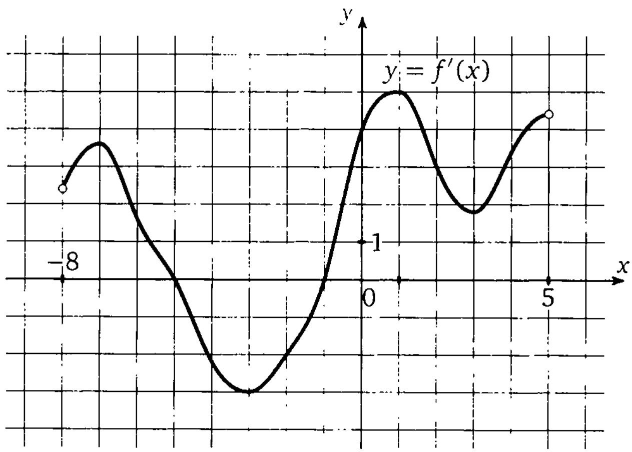
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

Т11.5

Т11.5. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 5)$. Найдите количество таких чисел x_i, что касательная к графику функции $f(x)$ в точке x_i параллельна прямой $y = 3x - 17$ или совпадает с ней.

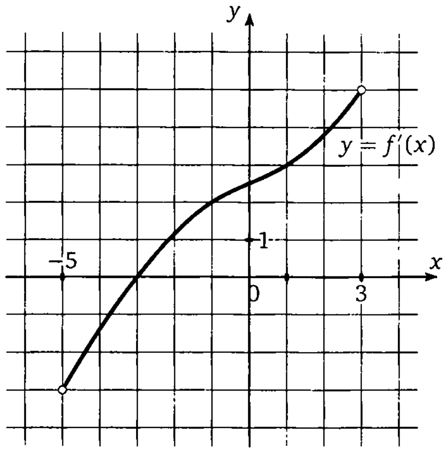


Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Решение задачи 15 диагностической работы

15. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-5; 3)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y=2x+7$ или совпадает с ней.



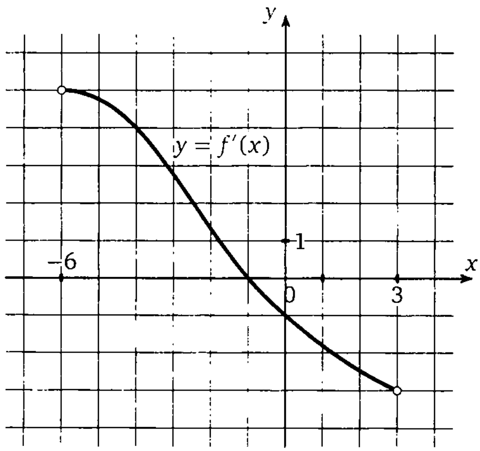
Решение. Если касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y=2x+7$ или совпадает с ней, то значение производной в точке касания равно 2. Для того чтобы найти искомую абсциссу, выясним, в какой точке значение производной функции $f(x)$ равно 2. Для этого проведем горизонтальную прямую $y=2$ и найдем абсциссу точки пересечения этой прямой с графиком производной. Она и будет искомой абсциссой точки касания.

Ответы:

Тренировочная работа 12

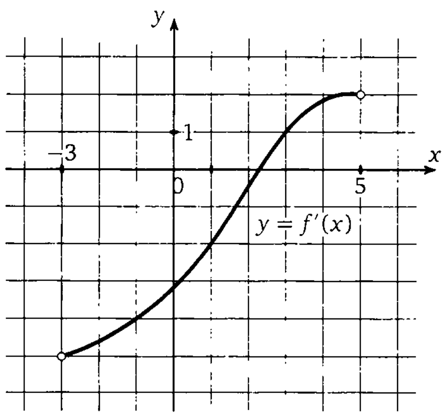
T12.1

T12.1. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6; 3)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y=4x+12$ или совпадает с ней.



T12.2

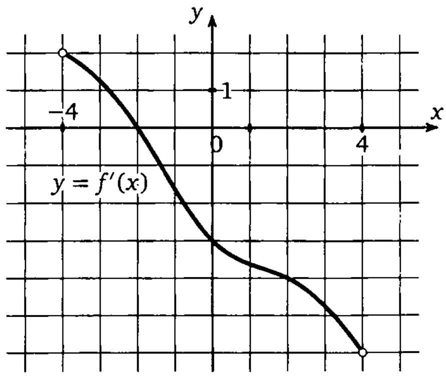
T12.2. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3; 5)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y=-4x+8$ или совпадает с ней.



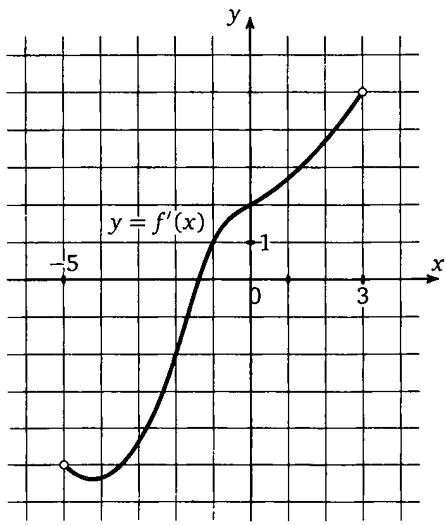
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Т12.3. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-4; 4)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -3x - 11$ или совпадает с ней.



Т12.4. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-5; 3)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 7 - 2x$ или совпадает с ней.



Ответы:

Т12.3

Т12.4

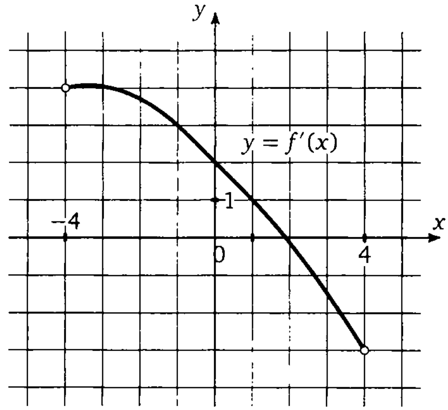
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

T12.5

T12.5. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-4; 4)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = x - 14$ или совпадает с ней.



Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Решение задачи 16 диагностической работы

16. Прямая $y = 4x + 13$ параллельна касательной к графику функции
$$y = x^2 - 3x + 5.$$
Найдите абсциссу точки касания.

Если прямая параллельна касательной к графику функции в какой-то точке (назовем ее x_0), то ее угловой коэффициент (в нашем случае 4) равен значению производной функции в точке x_0. Производной функции
$$y = x^2 - 3x + 5$$
будет функция
$$f'(x) = 2x - 3.$$
Значит, для нахождения искомой точки касания необходимо, чтобы $2x - 3 = 4$, откуда $x = 3{,}5$.

Ответы:

T13.1

T13.2

T13.3

T13.4

T13.5

Образец написания: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Тренировочная работа 13

T13.1. Прямая $y=6x+9$ параллельна касательной к графику функции
$$y = x^2+7x-6.$$
Найдите абсциссу точки касания.

T13.2. Прямая $y=-5x-6$ параллельна касательной к графику функции
$$y = x^2+8x-7.$$
Найдите абсциссу точки касания.

T13.3. Прямая $y=-3x+8$ параллельна касательной к графику функции
$$y = x^2+7x-6.$$
Найдите абсциссу точки касания.

T13.4. Прямая $y=8x+8$ параллельна касательной к графику функции
$$y = x^2-3x+8.$$
Найдите абсциссу точки касания.

T13.5. Прямая $y=4x+9$ параллельна касательной к графику функции
$$y = x^2+7x-4.$$
Найдите абсциссу точки касания.

Решение задачи 17 диагностической работы

17. Прямая $y = 2x + 37$ является касательной к графику функции

$$y = x^3 + 3x^2 - 7x + 10.$$

Найдите абсциссу точки касания.

Решение. Заметим, что если прямая является касательной к графику, то ее угловой коэффициент должен быть равен производной функции в точке касания, откуда имеем $3x^2 + 6x - 7 = 2$, то есть $3x^2 + 6x - 9 = 0$ или $x^2 + 2x - 3 = 0$. Это квадратное уравнение имеет два корня: -3 и 1. Таким образом есть две точки, в которых касательная к графику функции

$$y = x^3 + 3x^2 - 7x + 10$$

имеет угловой коэффициент, равный 2. Для того чтобы определить, в какой из этих двух точек прямая $y = 2x + 37$ касается графика функции, вычислим значения функции в этих точках и проверим, удовлетворяют ли они уравнению касательной. Значение функции

$$y = x^3 + 3x^2 - 7x + 10$$

в точке -3 равно $-27 + 27 + 21 + 10 = 31$, а значение в точке 1 равно $1 + 3 - 7 + 10 = 7$. Заметим, что точка с координатами $(1; 7)$ не удовлетворяет уравнению касательной, так как $7 \neq 2 + 37$. А вот точка $(-3; 31)$ уравнению касательной удовлетворяет, так как $-6 + 37 = 31$. Значит, искомая абсцисса точки касания равна -3.

Ответы:

T14.1

T14.2

T14.3

T14.4

T14.5

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Тренировочная работа 14

T14.1. Прямая

$$y = -2x - 12$$

является касательной к графику функции

$$y = x^3 - 2x^2 - 6x - 4.$$

Найдите абсциссу точки касания.

T14.2. Прямая

$$y = -x + 4$$

является касательной к графику функции

$$y = x^3 + x^2 - x + 4.$$

Найдите абсциссу точки касания.

T14.3. Прямая

$$y = x + 11$$

является касательной к графику функции

$$y = x^3 + 5x^2 + 9x + 15.$$

Найдите абсциссу точки касания.

T14.4. Прямая

$$y = -4x + 15$$

является касательной к графику функции

$$y = x^3 - 6x^2 + 8x + 7.$$

Найдите абсциссу точки касания.

T14.5. Прямая

$$y = 5x + 11$$

является касательной к графику функции

$$y = x^3 + 4x^2 + 9x + 11.$$

Найдите абсциссу точки касания.

Решение задачи 18 диагностической работы

18. Прямая $y = 3x + 1$ является касательной к графику функции $y = ax^2 + 2x + 3$. Найдите a.

Аналогично решению предыдущей задачи производная функции в точке касания должна совпадать с угловым коэффициентом прямой. Откуда, если за x_1 принять абсциссу точки касания, имеем: $2ax_1 + 2 = 3$. То есть $ax_1 = \frac{1}{2}$. Найдем значение исходной функции в точке касания:

$$ax_1^2 + 2x_1 + 3 = \frac{1}{2}x_1 + 2x_1 + 3 = \frac{5}{2}x_1 + 3.$$

Так как прямая $y = 3x + 1$ — касательная, имеем: $\frac{5}{2}x_1 + 3 = 3x_1 + 1$, откуда $x_1 = 4$. А значит $a = \frac{1}{8}$.

Немного по-другому следует действовать, если неизвестен другой коэффициент квадратичной функции. Рассмотрим возможные задачи.

Прямая $y = 5x - 13$ является касательной к графику функции $y = 2x^2 + bx + 37$. Найдите b.

Решение. Если x_0 — абсцисса точки касания, то $4x_0 + b = 5$, откуда $b = 5 - 4x_0$. Аналогично предыдущей задаче найдем x_0. $2x_0^2 + (5 - 4x_0)x_0 + 37 = 5x_0 - 13$, откуда несложными преобразованиями получаем $x_0^2 = 25$. Имеем две возможности: при $x_0 = -5$ имеем $b = 25$, при $x_0 = 5$ имеем $b = -15$.

Как видно, задача имеет два решения, в таких случаях обычно вводится дополнительное условие, позволяющее отбросить одно из них. Например, условие положительности x_0 или значения функции в точке касания.

Самым простым случаем является следующая задача.

Прямая $y = 4x + 3$ является касательной к графику функции $y = x^2 - 2x + c$. Найдите c.

Решение. Аналогично предыдущим задачам обозначим абсциссу точки касания x_0 и приравняем значение производной функции в точке x_0 угловому коэффициенту касательной.

$2x_0 - 2 = 4$, откуда $x_0 = 3$. Значение исходной функции в точке 3 равно $9 - 6 + c = c + 3$, значит $c + 3 = 4 \cdot 3 + 3$, откуда $c = 12$.

Ответы:

T15.1

T15.2

T15.3

T15.4

T15.5

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Тренировочная работа 15

T15.1. Прямая $y = x + 3$ является касательной к графику функции $y = ax^2 + 3x - 2$. Найдите a.

T15.2. Прямая $y = 6x - 5$ является касательной к графику функции $y = 3x^2 + bx + 7$. Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

T15.3. Прямая $y = 3x + 4$ является касательной к графику функции $y = 3x^2 - 3x + c$. Найдите c.

T15.4. Прямая $y = x + 4$ является касательной к графику функции $y = ax^2 - 3x + 5$. Найдите a.

T15.5. Прямая $y = 4x - 3$ является касательной к графику функции $y = 8x^2 - 12x + c$. Найдите c.

Решение задачи 19 диагностической работы

19. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = \frac{1}{2}t^3 - 3t^2 + 2t$$

(где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость в момент времени $t = 6$ с.

Решение. Так как мгновенная скорость точки в момент времени t_0, прямолинейного движения, совершаемого по закону $x = f(t)$, равна значению производной функции f при $t = t_0$, искомая скорость будет равна

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6^2 - 3 \cdot 2 \cdot 6 + 2 = 20 \text{ м/с}.$$

Ответы:

T16.1

T16.2

T16.3

T16.4

T16.5

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Тренировочная работа 16

T16.1. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = 6t^2 - 48t + 17$$

(где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость в момент времени $t = 9$ с.

T16.2. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = t^3 - 4t^2 + 2t + 11$$

(где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость в момент времени $t = 7$ с.

T16.3. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = -2t^3 + 7t^2 + 4t$$

(где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость в момент времени $t = 2$ с.

T16.4. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = 5t^2 - 4t + 16$$

(где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость в момент времени $t = 8$ с.

T16.5. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{4t^2}{5} - 7t + 6$$

(где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость в момент времени $t = 5$ с.

Решение задачи 20 диагностической работы

20. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 - 5t + 3$$

(где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени ее скорость была равна 2 м/с?

Решение. Воспользовавшись тем же рассуждением, что и в предыдущей задаче получим, что если искомое время t_0, то

$$\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot t_0^2 - 3 \cdot 2 \cdot t_0 - 5 = 2,$$

откуда $t_0^2 - 6t_0 - 7 = 0$, $t_0 = -1$ или $t_0 = 7$. Ввиду того, что t_0 — время, не может быть отрицательным, ответом в задаче будет 7 секунд.

Ответы:

T17.1

T17.2

T17.3

T17.4

T17.5

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Тренировочная работа 17

T17.1. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = t^3 - 11t^2 - 6t + 8$$

(где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени ее скорость была равна 10 м/с?

T17.2. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} - 3t + 17$$

(где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени ее скорость была равна 15 м/с?

T17.3. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = t^2 - 13t + 23$$

(где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени ее скорость была равна 3 м/с?

T17.4. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = t^3 - 9t^2 + 2t + 30$$

(где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени ее скорость была равна 50 м/с?

T17.5. Материальная точка движется прямолинейно по закону

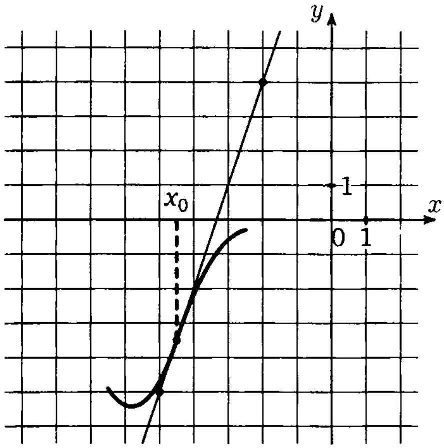
$$x(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 - 12t + 9$$

(где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени ее скорость была равна 12 м/с?

Диагностическая работа 1

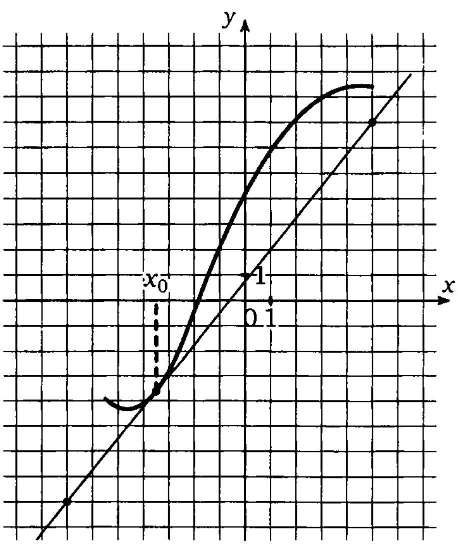
Ответы:

Д1.1. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Д1.1

Д1.2. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Д1.2

Образец написания:

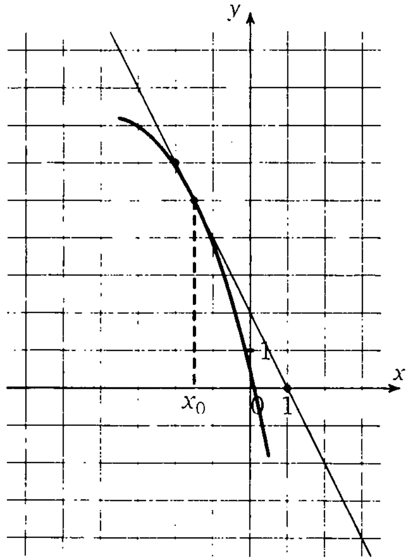
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

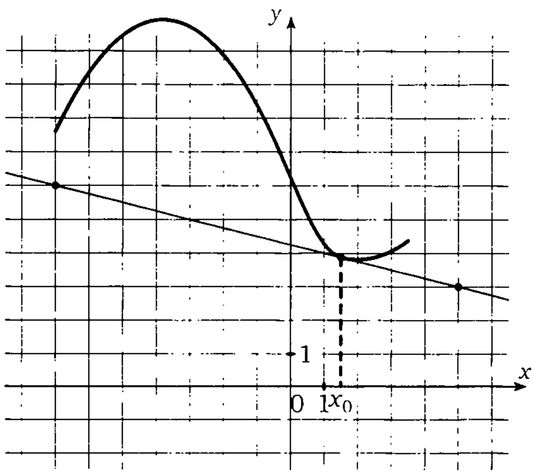
Д1.3

Д1.4

Д1.3. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Д1.4. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

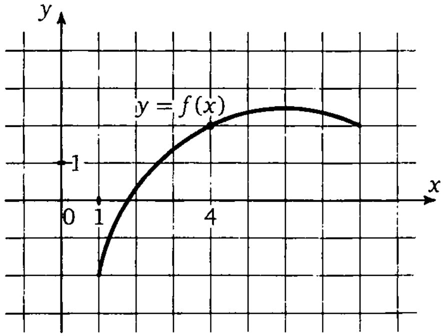


Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

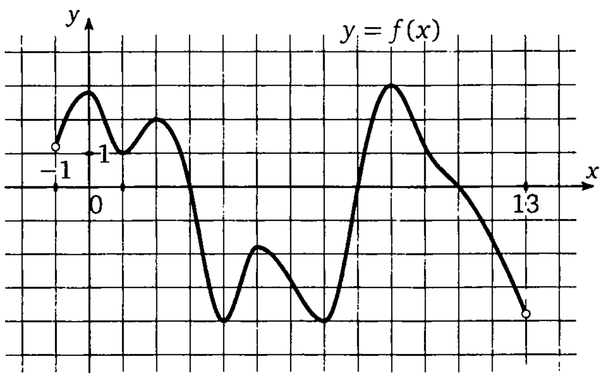
Ответы:

Д1.5. На рисунке изображен график функции $f(x)$. Касательная к этому графику, проведенная в точке 4, проходит через начало координат. Найдите $f'(4)$.



Д1.5

Д1.6. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-1; 13)$. Определите количество целых чисел x_i, таких, что $f'(x_i)$ отрицательно.



К задачам Д1.6, Д1.7, Д1.8

Д1.6

Д1.7. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-1; 13)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.

Д1.7

Д1.8. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-1; 13)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -10$.

Д1.8

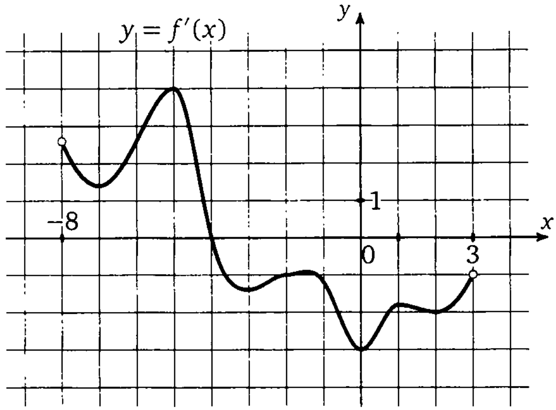
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

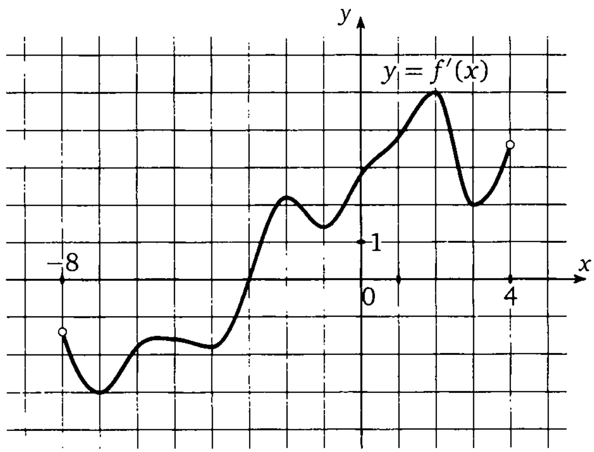
Д1.9

Д1.9. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 3)$. В какой точке отрезка $[-3; 2]$ $f(x)$ принимает наибольшее значение?



Д1.10

Д1.10. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 4)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-4; -1]$.



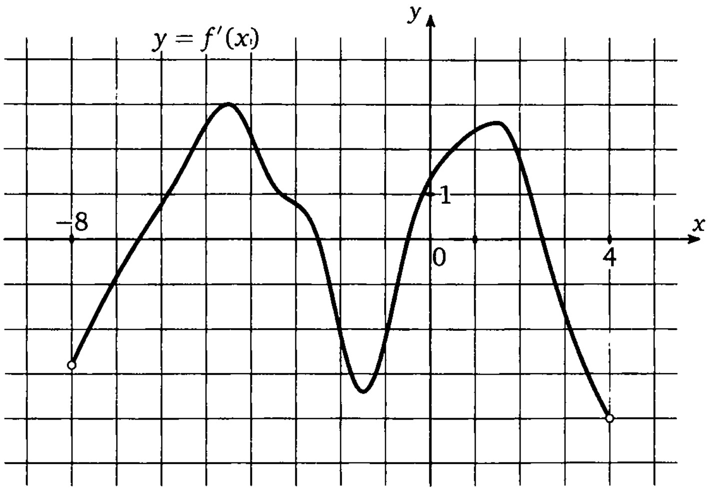
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

Д1.11. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 4)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-7; -1]$.

Д1.11



К задачам Д1.11, Д1.12

Д1.12. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 4)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых чисел, входящих в эти промежутки.

Д1.12

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

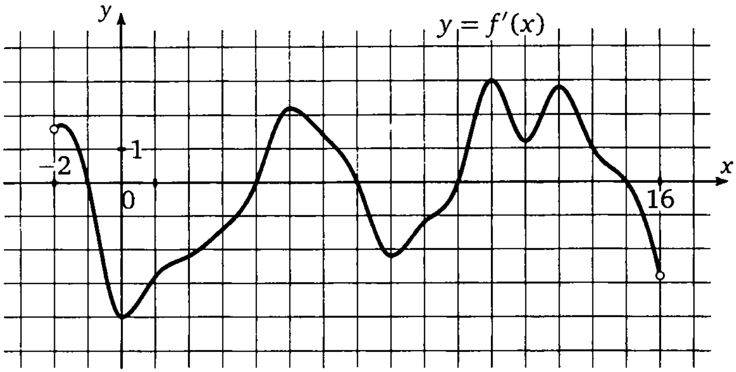
Д1.13

Д1.14

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

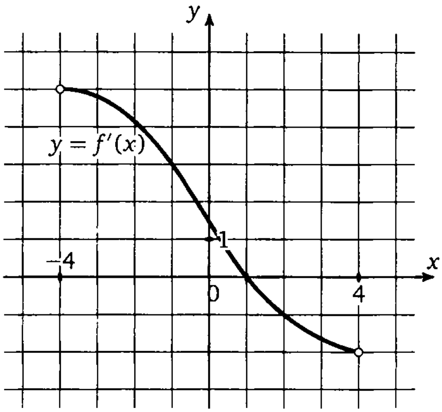
Д1.13. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2; 16)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



К задачам Д1.13, Д1.14

Д1.14. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2; 16)$. Найдите количество таких чисел x_i, что касательная к графику функции $f(x)$ в точке x_i параллельна прямой $y = -3x + 6$ или совпадает с ней.

Д1.15. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-4; 4)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 3x + 5$ или совпадает с ней.



Д1.16. Прямая $y = 8x + 9$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 5x + 6$. Найдите абсциссу точки касания.

Д1.17. Прямая $y = 5x + 14$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 4x^2 + 9x + 14$. Найдите абсциссу точки касания.

Д1.18. Прямая $y = -5x + 8$ является касательной к графику функции $y = 28x^2 + bx + 15$. Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

Д1.19. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = t^3 - 6t^2 - 18t + 6$$

(где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость в момент времени $t = 5$ с.

Д1.20. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = t^3 - t^2 - 12t + 18$$

(где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени ее скорость была равна 9 м/с?

Ответы:

Д1.15

Д1.16

Д1.17

Д1.18

Д1.19

Д1.20

Образец написания:

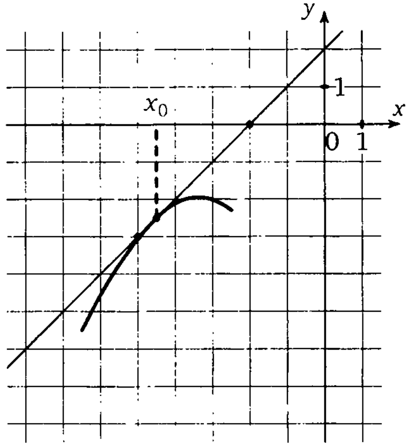
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

Диагностическая работа 2

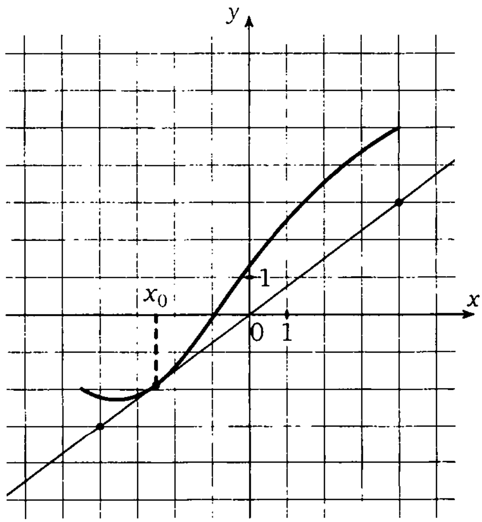
Д2.1

Д2.1. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Д2.2

Д2.2. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

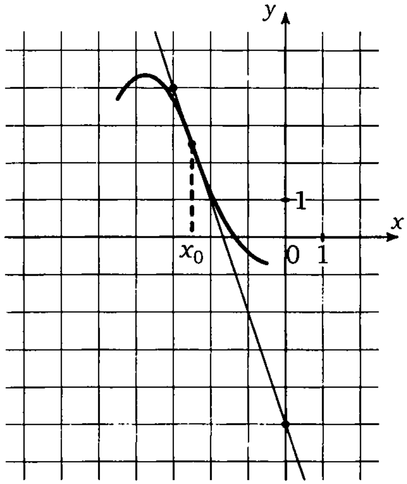


Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

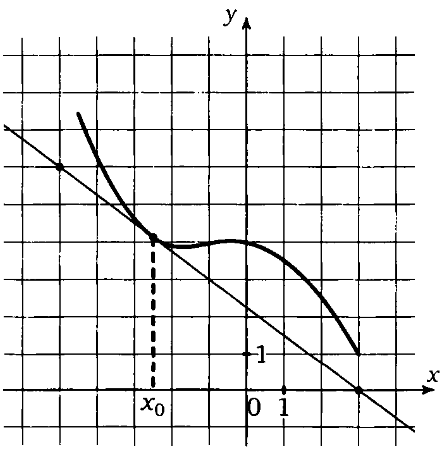
Ответы:

Д2.3. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Д2.3

Д2.4. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Д2.4

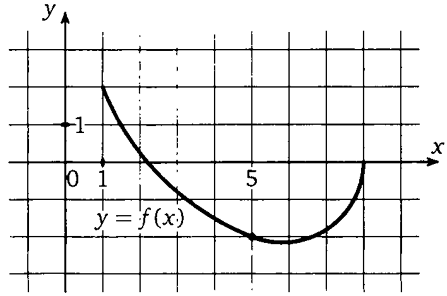
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

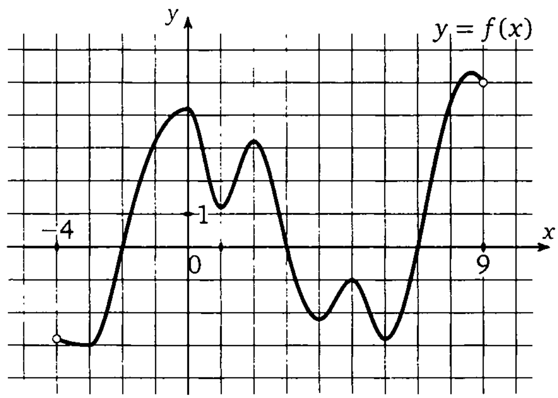
Д2.5

Д2.5. На рисунке изображен график функции $f(x)$. Касательная к этому графику, проведенная в точке 5, проходит через начало координат. Найдите $f'(5)$.



Д2.6

Д2.6. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-4; 9)$. Определите количество целых чисел x_i, таких, что $f'(x_i)$ отрицательно.



К задачам Д2.6, Д2.7, Д2.8

Д2.7

Д2.7. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-4; 9)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.

Д2.8

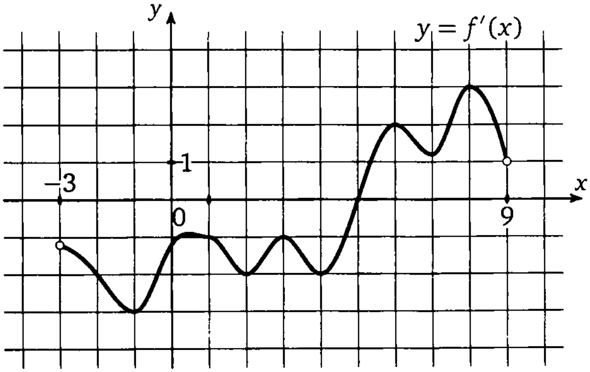
Д2.8. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-4; 9)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 14$.

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

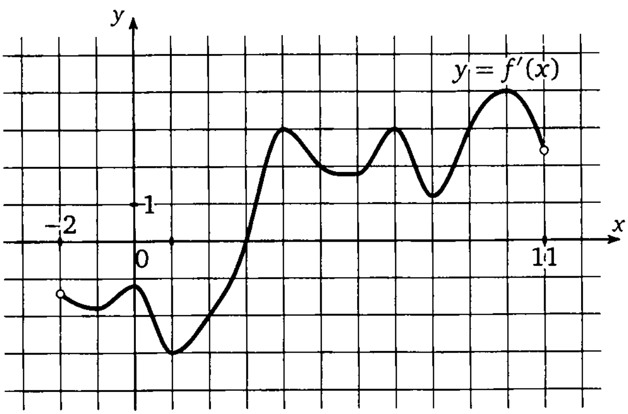
Ответы:

Д2.9. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3; 9)$. В какой точке отрезка $[-2; 3]$ $f(x)$ принимает наибольшее значение?



Д2.9

Д2.10. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2; 11)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[1; 6]$.



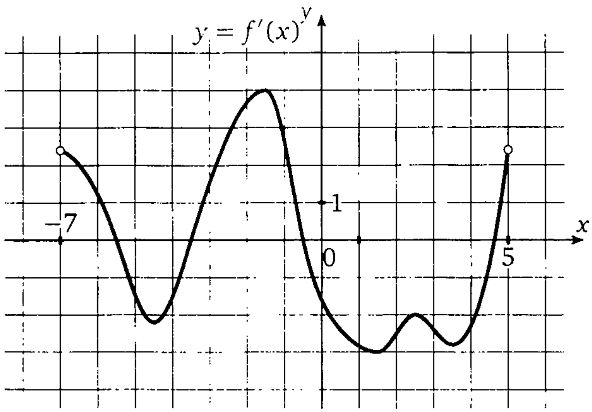
Д2.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Д2.11

Д2.11. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7; 5)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-6; -1]$.



К задачам Д2.11, Д2.12

Д2.12

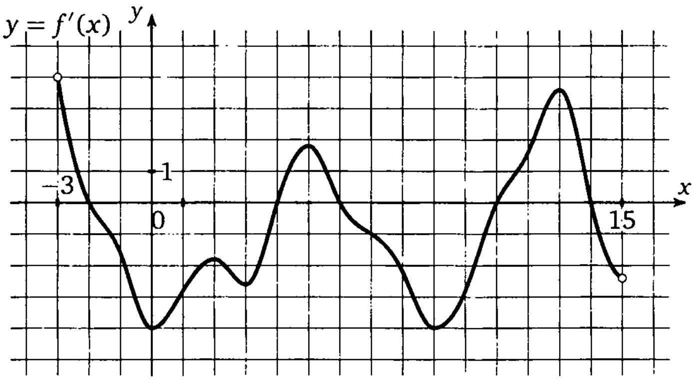
Д2.12. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7; 5)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых чисел, входящих в эти промежутки.

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

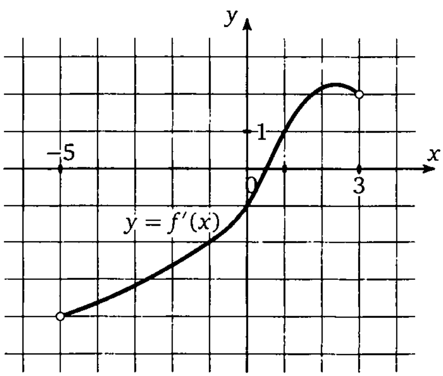
Д2.13. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3; 15)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



К задачам Д2.13, Д2.14

Д2.14. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3; 15)$. Найдите количество таких чисел x_i, что касательная к графику функции $f(x)$ в точке x_i параллельна прямой $y = -2x + 8$ или совпадает с ней.

Д2.15. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-5; 3)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -2x + 6$ или совпадает с ней.



Д2.13

Д2.14

Д2.15

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

Д2.16

Д2.17

Д2.18

Д2.19

Д2.20

Д2.16. Прямая $y = 3x + 7$ параллельна касательной к графику функции
$$y = x^2 - 5x - 6.$$
Найдите абсциссу точки касания.

Д2.17. Прямая $y = 3x + 8$ является касательной к графику функции
$$y = x^3 + x^2 + 2x + 7.$$
Найдите абсциссу точки касания.

Д2.18. Прямая $y = 5 - x$ является касательной к графику функции $y = ax^2 + 5x + 3$. Найдите a.

Д2.19. Материальная точка движется прямолинейно по закону
$$x(t) = -t^4 + 6t^3 + 5t + 23$$
(где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость в момент времени $t = 3$ с.

Д2.20. Материальная точка движется прямолинейно по закону
$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 5t + 19$$
(где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени ее скорость была равна 20 м/с?

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Ответы

Диагностическая работа. 1. 3. **2.** 0,5. **3.** −3. **4.** −0,25. **5.** 1,5. **6.** 4. **7.** 5. **8.** 5. **9.** 0. **10.** −3. **11.** 2. **12.** 16. **13.** 6. **14.** 6. **15.** −1. **16.** 3,5. **17.** −3. **18.** 0,125. **19.** 20. **20.** 7.

Тренировочная работа 1 (Т1). 1. −0,5. **2.** 0,75. **3.** −3. **4.** −0,25. **5.** −0,75.

Тренировочная работа 2 (Т2). 1. 2. **2.** 0,5. **3.** −3. **4.** 0,75. **5.** −0,5.

Тренировочная работа 3 (Т3). 1. 6. **2.** 4. **3.** 5. **4.** 3. **5.** 6.

Тренировочная работа 4 (Т4). 1. 7. **2.** 7. **3.** 7. **4.** 6. **5.** 8.

Тренировочная работа 5 (Т5). 1. 4. **2.** 9. **3.** 8. **4.** 9. **5.** 7.

Тренировочная работа 6 (Т6). 1. 3. **2.** 4. **3.** −2. **4.** −4. **5.** 5.

Тренировочная работа 7 (Т7). 1. −3. **2.** 4. **3.** 7. **4.** −1. **5.** −2.

Тренировочная работа 8 (Т8). 1. 4. **2.** 7. **3.** 5. **4.** 5. **5.** 4.

Тренировочная работа 9 (Т9). 1. −12. **2.** 2. **3.** 7. **4.** 40. **5.** 21.

Тренировочная работа 10 (Т10). 1. 6. **2.** 5. **3.** 7. **4.** 4. **5.** 3.

Тренировочная работа 11 (Т11). 1. 3. **2.** 4. **3.** 5. **4.** 3. **5.** 5.

Тренировочная работа 12 (Т12). 1. −4. **2.** −1. **3.** 0. **4.** −2. **5.** 1.

Тренировочная работа 13 (Т13). 1. −0,5. **2.** −6,5. **3.** −5. **4.** 5,5. **5.** −1,5.

Тренировочная работа 14 (Т14). 1. 2. **2.** 0. **3.** −2. **4.** 2. **5.** −2.

Тренировочная работа 15 (Т15). 1. −0,2. **2.** −6. **3.** 7. **4.** 4. **5.** −1.

Тренировочная работа 16 (Т16). 1. 60. **2.** 93. **3.** 8. **4.** 76. **5.** 10.

Тренировочная работа 17 (Т17). 1. 8. **2.** 6. **3.** 8. **4.** 8. **5.** 6.

Диагностическая работа 1 (Д1). 1. 3. **2.** 1,25. **3.** −2. **4.** −0,25. **5.** 0,5. **6.** 1. **7.** 7. **8.** 7. **9.** −3. **10.** −3. **11.** 1. **12.** −7. **13.** 5. **14.** 2. **15.** −1. **16.** 1,5. **17.** 2. **18.** −33. **19.** 33. **20.** 3.

Диагностическая работа 2 (Д2). 1. 1. **2.** 0,75. **3.** −3. **4.** −0,75. **5.** −0,4. **6.** 1. **7.** 8. **8.** 8. **9.** −2. **10.** 3. **11.** 1. **12.** 1. **13.** 3. **14.** 7. **15.** −1. **16.** 4. **17.** −1. **18.** −4,5. **19.** 59. **20.** 5.

Содержание