ЕГЭ 2012
Математика

С. А. Шестаков

Задача В14

Исследование функций

Рабочая тетрадь

учени________________________

____________класса____________

школы________________________

____

____

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14

Под редакцией
А. Л. Семенова и И. В. Ященко

Разработано МИОО

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ

С. А. Шестаков

ЕГЭ 2012. Математика
Задача B14
Исследование функций

Рабочая тетрадь

Издание третье, дополненное

Под редакцией А. Л. Семенова и И. В. Ященко

Издание соответствует брошюре
«ЕГЭ 2011. Математика. Задача B11» издательства МЦНМО

Москва
Издательство МЦНМО
2012

УДК 373:51
ББК 22.1я72
Ш51

Шестаков С. А.

Ш51 ЕГЭ 2012. Математика. Задача B14. Исследование функций. Рабочая тетрадь / Под ред. А. Л. Семенова и И. В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2012. — 80 с.

ISBN 978-5-94057-864-2

Рабочая тетрадь по математике серии «ЕГЭ 2012. Математика» ориентирована на подготовку учащихся старшей школы к успешной сдаче единого государственного экзамена по математике в 2012 году. В рабочей тетради представлены задачи по одной позиции контрольных измерительных материалов ЕГЭ-2012.

На различных этапах обучения пособие поможет обеспечить уровневый подход к организации повторения, осуществить контроль и самоконтроль знаний по теме «Исследование функций». Рабочая тетрадь ориентирована на один учебный год, однако при необходимости позволит в кратчайшие сроки восполнить пробелы в знаниях выпускника.

Тетрадь предназначена для учащихся старшей школы, учителей математики, родителей.

Издание соответствует брошюре «ЕГЭ 2011. Математика. Задача B11» издательства МЦНМО.

ББК 22.1я72

Шестаков Сергей Алексеевич

ЕГЭ 2012. Математика. Задача B14. Исследование функций. Рабочая тетрадь

Под редакцией А. Л. Семенова и И. В. Ященко

Подписано в печать 10.10.2011 г. Формат 70 × 90 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 5. Тираж 10000 экз. Заказ № 8574.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241–74–83.

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами
в ЗАО «ИПК Парето-Принт», г. Тверь, www.pareto-print.ru.

ISBN 978-5-94057-864-2

От редакторов серии

Прежде чем вы начнете работать с нашими тетрадями, мы хотим дать вам некоторые пояснения и советы.

Экзамен по математике в 2012 году состоит из двух частей: в первой части — 14 простых задач, в которых требуется краткий ответ (B1—B14); во второй части — 6 более сложных задач, требующих развернутого решения (C1—C6). Рабочие тетради B1—B14 организованы в соответствии со структурой первой части экзамена 2012 года и позволят вам подготовиться к выполнению всех заданий этой части, выявить и устранить пробелы в своих знаниях. К успешно зарекомендовавшей себя серии рабочих тетрадей 2011 года B1—B12 добавлены две новые тетради, соответствующие новым заданиям (по теории вероятностей и по стереометрии), и изменена нумерация остальных тетрадей.

Тем из вас, для кого главное — это набрать минимальный аттестационный балл, мы рекомендуем ориентироваться на устойчивое, безошибочное решение 8 заданий из первой части. (Хотя в реальности минимальное число заданий, которое нужно решить верно, может составить 5 или 6, но ведь вам нужно застраховаться от случайной ошибки!) Эти 8 (или больше) заданий нужно выбрать исходя из того, что вы хорошо понимаете их условия, вам знаком материал и в школе вы хорошо справлялись с аналогичными заданиями (не обязательно в курсе математики 11 класса, а на протяжении всего обучения). При этом следует в первую очередь уделять внимание тем заданиям, которые у вас уже получаются, добиваясь максимально надежного их выполнения, не ограничивая себя временем.

Те из вас, кто ориентируется на поступление в вуз, конечно, понимают, что им желательно с высокой надежностью решать все задачи части B — ведь на решение такой задачи и вписывание ответа в лист на экзамене уйдет меньше времени, чем на задачу части C, и жалко будет, если вы ошибетесь и потеряете нужный балл. Вам следует добиваться уверенного выполнения всех заданий первой части, большее внимание уделяя тем задачам, которые вызывают наибольшие затруднения. Устранение пробелов в ваших знаниях поможет вам и в работе с заданиями части C. Определив время, за которое вы можете уверенно без ошибок выполнить все задания первой части, следует планировать оставшееся время на экзамене на задания второй части.

Работу с тетрадью следует начать с выполнения диагностической работы.

Затем рекомендуется прочитать решения задач и сравнить свои решения с приведенными в книге. По тем задачам, которые вызвали затруднения, следует после повторения материала по учебнику или с учителем выполнить тематические тренинги.

Для завершающего контроля готовности к выполнению заданий соответствующей позиции ЕГЭ служат диагностические работы, приведенные в конце тетради.

Работа с серией рабочих тетрадей «ЕГЭ 2012. Математика» позволит выявить и в кратчайшие сроки ликвидировать пробелы в знаниях, но не может заменить систематического повторения (изучения) курса математики!

Желаем успеха!

Введение

Это пособие предназначено для подготовки к решению задач по теме «Исследование функций» и, в частности, задачи B14 единого государственного экзамена по математике.

Задача B14 представляет собой традиционное для школьных учебников задание на исследование функций: нахождение точек экстремума, экстремумов, наибольших и наименьших значений функций.

Для того чтобы сделать подготовку к ЕГЭ максимально эффективной, в пособие включены задания на исследование функций и тренировочные задания на вычисление значений производных, соответствующие всем шести функционально-числовым линиям школьного курса:

- целые рациональные функции (многочлены),
- дробно-рациональные функции,
- иррациональные функции,
- тригонометрические функции,
- показательная функция,
- логарифмическая функция.

Здесь под иррациональными функциями понимаются функции, заданные формулой, в которой переменная находится под знаком корня n-й степени или имеет дробную степень. Такое построение пособия позволит, с одной стороны, выявить существующие пробелы и проблемные зоны в подготовке с целью их устранения и выработки устойчивых навыков решения задач базового уровня и несколько более сложных задач на исследование функций, а с другой — использовать комплексный подход при организации и проведении обобщающего повторения. Кроме того, в пособие включен материал, связанный с вычислением наибольших и наименьших значений функций без применения производной. Этот материал предназначен для тех выпускников, которые планируют решать задания второй части ЕГЭ, и позволяет лучше подготовиться к решению задач C1, C3, C5. Выпускники, для которых экзамен по математике в выбранных ими вузах не является профильным, могут пропустить этот раздел.

Пособие состоит из двух параграфов и включает 5 диагностических и 21 тренировочную работы, а также разбор задач начальной диагностической работы с необходимыми методическими рекомендациями. Каждая диагностическая работа содержит 12 заданий (по два на каждую из шести функционально-числовых линий школьного курса в соответствии с указанным выше порядком). При этом первое из двух заданий каждой пары является заданием на вычисление точек экстремума, второе — заданием на вычисление наибольшего или наименьшего значения функции на данном отрезке. Каждая тренировочная работа первого параграфа (за исключением работ 1, 4, 7, 10, 13, 16) соответствует одному из заданий диагностической работы и содержит 10 задач для выработки или закрепления навыков решения по каждому типу заданий. Тренировочные работы 1, 4, 7, 10, 13, 16 являются вспомогательными и предназначены для закрепления навыков вычислений значений производных. Задания на исследование функций без применения производной в диагностические работы не включены. Эти задания скомпонованы в три тренировочные работы второго параграфа.

В начале работы с пособием целесообразно выполнить начальную диагностическую работу, определить, какие задачи вызывают затруднения, и обратиться при необходимости к разбору задач. После этого нужно потренироваться в решении задач каждого типа, выполнив тренировочные работы параграфа 1. Для завершения подготовки следует обратиться к диагностическим работам 1—4 и постараться решить их без ошибок. Желательно, чтобы время решения любой из диагностических и тренировочных работ не превышало одного часа. Материал второго параграфа, связанный с вычислением наибольших и наименьших значений функций без применения производной, носит, как уже отмечалось, факультативный характер и предназначен для тех выпускников, которые собираются поступать в вузы с профильным экзаменом по математике.

Подчеркнем, что в пособии рассматриваются задания, в значительной части отвечающие по уровню сложности заданию B14 ЕГЭ по математике. Умение решать такие задачи является базовым: без него невозможно продвинуться в решении более сложных задач. Тем не менее, часть включенных в пособие задач несколько сложнее задачи B14 демоверсии: их решение позволит нарастить определенную «математическую мускулатуру» и чувствовать себя на экзамене застрахованным от неприятных неожиданностей.

При подготовке к решению задач части 1 единого государственного экзамена нужно помнить следующее. Проверка ответов осуществляется компьютером после сканирования бланка ответов и сопоставления результатов сканирования с правильными ответами. Поэтому цифры в бланке ответов следует писать разборчиво и строго в соответствии с инструкцией по заполнению бланка (с тем чтобы, например, 1 и 7 или 8 и B распознавались корректно). К сожалению, ошибки сканирования полностью исключить нельзя, поэтому, если есть уверенность в задаче, за которую получен минус, нужно идти на апелляцию. Ответом к задаче может быть только целое число или конечная десятичная дробь. Ответ, зафиксированный в иной форме, будет распознан как неправильный. В этом смысле задание B14 не является исключением: если результатом вычислений явилась обыкновенная дробь, например $\frac{3}{4}$, перед записью ответа в бланк ее нужно обратить в десятичную, т. е. в ответе написать 0,75. Каждый символ (в том числе запятая и знак «минус») записывается в отдельную клеточку, как это показано на полях пособия.

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Диагностическая работа

1. Найдите точку максимума функции

$$y = x^3 - 48x + 17.$$

2. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^3 - 27x$$

на отрезке $[0; 4]$.

3. Найдите точку минимума функции

$$y = \frac{25}{x} + x + 25.$$

4. Найдите наибольшее значение функции

$$y = x + \frac{9}{x}$$

на отрезке $[-4; -1]$.

5. Найдите точку максимума функции

$$y = 7 + 6x - 2x^{\frac{3}{2}}.$$

6. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1$$

на отрезке $[1; 9]$.

7. Найдите точку минимума функции

$$y = (0{,}5 - x)\cos x + \sin x,$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

8. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 4\sqrt{2}\cos x + 4x - \pi + 4$$

на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

9. Найдите точку максимума функции

$$y = (x^2 - 17x - 17)e^{7-x}.$$

Ответы:

10. Найдите наименьшее значение функции

$$y = (x - 13)e^{x-12}$$

на отрезке [11; 13].

10

11. Найдите точку минимума функции

$$y = x - 5\ln x.$$

11

12. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 5 - 7x + 7\ln(x + 3)$$

на отрезке [−2,5; 0].

12

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

§1. Исследование функций с применением производной

Общие замечания

Можно выделить следующие основные группы задач по теме, вынесенной в название параграфа:

• исследование функции на экстремумы;

• исследование функции на возрастание/убывание;

• исследование функции на наибольшие и наименьшие значения (в том числе на отрезке);

• исследование функции с помощью графика ее производной (чтение графика производной).

Разница между первыми тремя и последней группами задач заключается лишь в способе задания функции. В более традиционных для школьных учебников задачах (первые три группы задач) функция задана аналитически, для решения задачи нужно найти производную, ее нули и промежутки знакопостоянства. Именно эти задачи и будут рассматриваться в пособии. В менее традиционных задачах, ставших очень популярными в последние годы (в том числе и благодаря ЕГЭ по математике), выводы о промежутках возрастания и убывания (т. е. промежутках монотонности), экстремумах функции, ее наименьших или наибольших значениях нужно сделать, исследуя заданный график производной этой функции.

Для успешного решения задач по теме необходимо уверенное владение навыками вычисления производных и решения неравенств. Исследование дифференцируемой функции на возрастание (убывание) сводится к определению промежутков знакопостоянства ее производной. Напомним соответствующие утверждения.

Если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала, то функция $y = f(x)$ возрастает на этом интервале (достаточный признак возрастания функции). Если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала, то функция $y = f(x)$ убывает на этом интервале (достаточный признак убывания функции).

Решение задач на нахождение точек максимума и минимума (точек экстремума) функции основывается на следующих утверждениях.

Признак максимума. *Если функция f непрерывна в точке x_0, $f'(x) > 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) < 0$ на интервале $(x_0; a)$, то x_0 — точка максимума функции f (упрощенная формулировка: если в точке x_0 производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 — точка максимума).*

Признак минимума. *Если функция f непрерывна в точке x_0, $f'(x) < 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) > 0$ на интервале $(x_0; a)$, то x_0 — точка минимума функции f (упрощенная формулировка: если в точке x_0 производная меняет знак с минуса на плюс, то x_0 — точка минимума).*

Условие непрерывности в точке x_0 является существенным. Если это условие не выполнено, точка x_0 может не являться точкой максимума (минимума), даже если функция f определена в ней и производная меняет знак при переходе через x_0. В самом деле, рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Хотя эта функция определена в точке $x = 0$ и в этой точке производная $f'(x) = 2x$ меняет знак с минуса на плюс, эта точка не является точкой минимума.

Точками максимума и минимума являются лишь точки области определения функции, и «ординат» эти точки иметь, разумеется, не могут. Тем не менее, иногда учащиеся называют, например, точку минимума функции $y = x^2 + 3$ не «точка 0», а «точка (0; 3)», подразумевая точку графика функции. Такое утверждение является ошибочным.

Значение функции в точке минимума называется *минимумом* функции, а значение в точке максимума — *максимумом* функции.

Если функция возрастает (убывает) на каждом из двух промежутков, то на их объединении она далеко не всегда является возрастающей (убывающей). Например, о функции $y = \operatorname{tg} x$ очень часто приводятся следующие ошибочные утверждения: «функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на всей области определения», «функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на объединении промежутков вида $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$». Если бы эти утверждения были верны, то из неравенства $2 > 1$ следовало бы, что $\operatorname{tg} 2 > \operatorname{tg} 1$, а это не так. Аналогично обстоит дело с функцией $y = \frac{1}{x}$: вывод о том, что она убывает на множестве $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, является математической ошибкой. В самом деле, из того, что $2 > -3$, отнюдь не следует, что $\frac{1}{2} < \frac{1}{-3}$, и, следовательно, функция $y = \frac{1}{x}$ не является убывающей на объединении промежутков $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Перечислять промежутки возрастания лучше, используя точку, точку с запятой или союз «и», а не знак объединения множеств. Впрочем, это совет скорее на будущее, на случай, если задача на исследование функций когда-нибудь попадет во вторую часть ЕГЭ по математике и будет требовать полного решения.

Для отыскания наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке, нужно вычислить ее значения в точках экстремума, принадлежащих отрезку, и значения на концах отрезка. Наибольшее (наименьшее) из вычисленных значений и будет наибольшим (соответственно наименьшим) значением функции на отрезке. Для функции, непрерывной на интервале, аналогичное утверждение справедливо далеко не всегда. В качестве примера рассмотрим функцию $y = \operatorname{tg} x$ на интервале (0; 1). На этом интервале функция не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений. Действительно, если предположить, что в точке x_0 функция достигает, например, наибольшего значения, то это наибольшее значение равно $y(x_0) = x_0$. Но тогда очевидно, что в любой точке $x_1 \in (x_0; 1)$ значение функции окажется больше, чем x_0, поскольку функция $y = \operatorname{tg} x$ является возрастающей.

Наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ обычно обозначаются символами $\max\limits_{[a;b]} f(x)$ и $\min\limits_{[a;b]} f(x)$ соответственно.

Из теоремы о промежуточных значениях непрерывной на отрезке функции следует, что если наибольшее и наименьшее значения функции на данном отрезке равны числам m и M соответственно, то множеством значений функции на данном отрезке является отрезок $[m; M]$. Поэтому к решению задачи на отыскание множества значений функции, непрерывной на отрезке, также применим алгоритм вычисления наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции.

Рассмотрим еще одну типичную ситуацию. При исследовании на монотонность непрерывной и дифференцируемой на $\mathbb{R}$ функции $y = 3x^4 - 4x^3$ в ответе нужно указать только два промежутка монотонности: $(-\infty; 1]$, на котором функция убывает, и $[1; +\infty)$ — промежуток возрастания. Точка 0, хотя и является критической, не будет концом промежутка монотонности, так как производная в этой точке не меняет знак. Напротив, при исследовании функции $y = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x}$ в ответе должны быть указаны три промежутка монотонности: $(-\infty; 0)$ и $[1; +\infty)$ — промежутки возрастания, $(0; 1]$ — промежуток убывания.

Значение в точке минимума функции, принадлежащей отрезку, вовсе не обязательно является наименьшим значением функции на этом отрезке. Например, для функции $y = x^3 - 3x$ наименьшим значением на отрезке $[-5; 2]$ является вовсе не $y(1) = -2$ (значение в точке минимума), а $y(-5) = -110$. Разумеется, аналогичное замечание справедливо и для точек максимума.

Для решения задачи B14 может оказаться полезным следующее свойство непрерывных функций: *если функция $y = f(x)$ имеет на промежутке I единственную точку экстремума x_0 и эта точка является точкой минимума, то в ней достигается наименьшее значение функции на данном промежутке*. Аналогичное утверждение справедливо для точки максимума и наибольшего значения функции. Например, если функция $y = f(x)$, непрерывная на отрезке $[a; b]$, имеет на промежутке $(a; b)$ единственную точку экстремума x_0 и эта точка является точкой максимума функции, то наибольшее значение функции на отрезке $[a; b]$ равно $f(x_0)$.

Иногда при решении задач на исследование функций оказывается, что на данном промежутке точек экстремума нет. Такой ситуации не надо пугаться: она означает, что на этом промежутке производная принимает значения одного знака, т. е. функция является монотонной на нем. Остается заметить, что если функция возрастает на отрезке, то наибольшее значение на нем достигается в правом конце отрезка, а наименьшее — в левом; если функция убывает на отрезке, то наибольшее значение на нем достигается в левом конце отрезка, а наименьшее — в правом. Например, пусть требуется найти наибольшее значение функции

$$y = 6\sqrt{2}\sin x - \frac{40}{\pi}x + 49$$

на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$. Производная этой функции есть $y' = 6\sqrt{2}\cos x - \frac{40}{\pi}$. Поскольку $\pi < 4$, получим, что $\frac{40}{\pi} > 10$. Но $6\sqrt{2}\cos x = \sqrt{72}\cos x < \sqrt{81}\cos x$, т. е. $6\sqrt{2}\cos x < < 9\cos x \leqslant 9$. Поэтому $y' < 0$ при любом действительном значении аргумента. Значит, функция $y = 9\sin x - \frac{40}{\pi}x + 49$ является убывающей на всей числовой прямой и своего наибольшего значения на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$ достигает в точке $x = \frac{\pi}{4}$. Таким образом,

$$\max_{\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]} y(x) = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 6\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{40}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4} + 49 = 45.$$

Особое место в ряду задач на вычисление наибольших и наименьших значений занимают «текстовые» задачи (как правило, с геометрическим содержанием). Обычно в таких задачах требуется найти наибольшее или наименьшее возможное значение некоторой величины. При этом искомая величина рассматривается как функция некоторой другой величины. Так, например, если известен периметр p прямоугольника, то его площадь можно рассматривать как функцию $S(x) = x\cdot\frac{p-2x}{2}$, где x — одна из сторон прямоугольника. Исследовав эту функцию, можно установить, какой из всех возможных прямоугольников данного периметра имеет наибольшую площадь. Для данной задачи это можно сделать и без применения производной, поскольку функция площади является квадратичной функцией с отрицательным коэффициентом при второй степени аргумента. Поэтому наибольшее значение достигается в абсциссе вершины параболы, являющейся графиком функции, т. е. в точке $x = \frac{p}{4}$. Следовательно, одна из сторон прямоугольника равна четверти периметра. Но тогда и любая другая сторона будет равна $\frac{p}{4}$. Таким образом, из всех прямоугольников данного периметра p наибольшую площадь $\frac{p^2}{16}$ имеет квадрат. Другие задачи на вычисление наибольших и наименьших значений функции без применения производной будут рассмотрены в следующем параграфе.

Целые рациональные функции. Решения задач 1 и 2 диагностической работы

1. Найдите точку максимума функции

$$y = x^3 - 48x + 17.$$

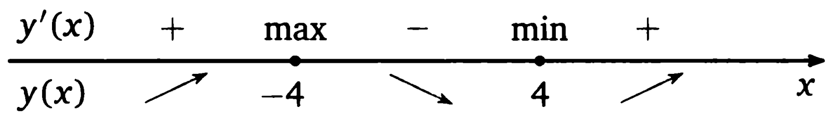
Решение. Найдем производную данной функции:

$$y' = 3x^2 - 48.$$

Определим промежутки знакопостоянства производной, разложив полученное выражение на множители:

$$3x^2 - 48 = 3(x^2 - 16) = 3(x+4)(x-4).$$

В точке $x = -4$ производная меняет знак с плюса на минус, следовательно, эта точка и является единственной точкой максимума.



Ответ: -4.

2. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^3 - 27x$$

на отрезке $[0; 4]$.

Решение. Найдем производную функции

$$y = x^3 - 27x$$

и воспользуемся формулой разности квадратов:

$$y' = 3x^2 - 27, \quad y' = 3(x-3)(x+3).$$

Производная меняет знак в точках $x = -3$ и $x = 3$. Отрезку $[0; 4]$ принадлежит только точка $x = 3$, в которой производная меняет знак с минуса на плюс. Таким образом, точка $x = 3$ является точкой минимума и единственной точкой экстремума на данном отрезке. Значит, своего наименьшего значения на данном отрезке функция достигает именно в этой точке. Найдем наименьшее значение:

$$y(3) = 3^3 - 27 \cdot 3 = -54.$$

Ответ: -54.

Ответы:

Тренировочная работа 1

T1.1. Найдите $f'(0)$, если
$$f(x) = 3x^4 - 15x^2 - 4x + 16.$$

T1.2. Найдите $f'(-1)$, если
$$f(x) = x^5 + x^7 + x^{12}.$$

T1.3. Найдите $f'(1)$, если
$$f(x) = x^3x^4x^7.$$

T1.4. Найдите $f'(4)$, если
$$f(x) = (x-5)^{14}.$$

T1.5. Найдите $f'(-3)$, если
$$f(x) = 3(x+4)^5.$$

T1.6. Найдите $f'(4)$, если
$$f(x) = (3x-11)^8.$$

T1.7. Найдите $f'(-5)$, если
$$f(x) = (x+4)^6 + (x+6)^4.$$

T1.8. Найдите $f'(-4)$, если
$$f(x) = (x-5)(x+5)^4.$$

T1.9. Найдите $y'(-4)$, если
$$y = (x+3)^7(x+7)^3.$$

T1.10. Найдите $f'(-3)$, если
$$f(x) = (x+1)(x+2)(x+3).$$

T1.1

T1.2

T1.3

T1.4

T1.5

T1.6

T1.7

T1.8

T1.9

T1.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

Т2.1

Т2.2

Т2.3

Т2.4

Т2.5

Т2.6

Т2.7

Т2.8

Т2.9

Т2.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Тренировочная работа 2

Т2.1. Найдите точку минимума функции

$$y = x^3 - 2x^2 + x - 2.$$

Т2.2. Найдите точку максимума функции

$$y = 9 - 4x + 4x^2 - x^3.$$

Т2.3. Найдите точку минимума функции

$$y = x^3 - 3{,}5x^2 + 2x - 3.$$

Т2.4. Найдите точку максимума функции

$$y = x^3 + x^2 - 8x - 7.$$

Т2.5. Найдите точку минимума функции

$$y = x^3 - 4x^2 - 3x - 12.$$

Т2.6. Найдите точку максимума функции

$$y = x^3 + 8x^2 + 16x + 3.$$

Т2.7. Найдите точку минимума функции

$$y = x^3 + x^2 - 16x + 5.$$

Т2.8. Найдите точку максимума функции

$$y = x^3 + 4x^2 + 4x + 4.$$

Т2.9. Найдите точку минимума функции

$$y = x^3 - 4x^2 - 8x + 8.$$

Т2.10. Найдите точку максимума функции

$$y = x^3 + 5x^2 + 3x + 2.$$

Тренировочная работа 3

Т3.1. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 3x^2 - 2x^3 + 1$$
на отрезке $[-4; 0]$.

Т3.2. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 4x^2 - 4x - x^3$$
на отрезке $[1; 3]$.

Т3.3. Найдите наименьшее значение функции
$$y = x^3 - 2x^2 + x + 5$$
на отрезке $[1; 4]$.

Т3.4. Найдите наибольшее значение функции
$$y = x^3 + x^2 - 8x - 8$$
на отрезке $[-3; 0]$.

Т3.5. Найдите наименьшее значение функции
$$y = x^3 - 4x^2 - 3x - 11$$
на отрезке $[0; 6]$.

Т3.6. Найдите наибольшее значение функции
$$y = -(x+6)(x^2 - 36)$$
на отрезке $[-4; 3]$.

Т3.7. Найдите наименьшее значение функции
$$y = (x-3)(x+3)^2$$
на отрезке $[-2; 2]$.

Т3.8. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 2\frac{23}{27} + (x-2)^2 + (x-2)^3$$
на отрезке $[1; 2]$.

Т3.9. Найдите наименьшее значение функции
$$y = (1-x)(x-4)^2$$
на отрезке $[0; 3]$.

Т3.10. Найдите наибольшее значение функции
$$y = (x-10)(x^2 - 11x + 10)$$
на отрезке $[-1; 7]$.

Ответы:

Т3.1

Т3.2

Т3.3

Т3.4

Т3.5

Т3.6

Т3.7

Т3.8

Т3.9

Т3.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Дробно-рациональные функции. Решения задач 3 и 4 диагностической работы

3. Найдите точку минимума функции

$$y = \frac{25}{x} + x + 25.$$

Решение. Найдем производную данной функции:

$$y' = -\frac{25}{x^2} + 1.$$

Определим промежутки знакопостоянства производной, приведя полученное выражение к общему знаменателю и разложив числитель на множители:

$$\frac{x^2 - 25}{x^2} = \frac{(x-5)(x+5)}{x^2}.$$

В точке $x = 5$ производная меняет знак с минуса на плюс, следовательно, эта точка и является единственной точкой минимума.

Ответ: 5.

4. Найдите наибольшее значение функции $y = x + \frac{9}{x}$ на отрезке $[-4; -1]$.

Решение. Найдем производную данной функции:

$$y' = 1 - \frac{9}{x^2}.$$

Приведем полученное выражение к общему знаменателю и разложим числитель на множители:

$$\frac{x^2 - 9}{x^2} = \frac{(x-3)(x+3)}{x^2}.$$

Отрезку $[-4; -1]$ принадлежит только точка $x = -3$, в которой производная меняет знак с плюса на минус. Таким образом, точка $x = -3$ является точкой максимума и единственной точкой экстремума на данном отрезке. Значит, своего наибольшего значения на данном отрезке функция достигает именно в этой точке. Найдем наибольшее значение:

$$y(-3) = -3 + \frac{9}{-3} = -6.$$

Ответ: -6.

Ответы:

Тренировочная работа 4

Т4.1. Найдите $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$, если

$$f(x)=3x^{-2}.$$

Т4.2. Найдите $y'(1)$, если

$$y(x)=\frac{7}{x^3}.$$

Т4.3. Найдите $f'\left(\frac{3}{4}\right)$, если

$$f(x)=5x+9x^{-1}+8.$$

Т4.4. Найдите $g'(-1)$, если

$$g(x)=\frac{4x^2+3x+7}{x}.$$

Т4.5. Найдите $y'(-10)$, если

$$y=8(x+9)^{-10}.$$

Т4.6. Найдите $g'(7)$, если

$$g(x)=\frac{7}{(x-6)^5}.$$

Т4.7. Найдите $f'(-4{,}5)$, если

$$f(x)=\frac{x-4}{x^2-16}.$$

Т4.8. Найдите $y'(2)$, если

$$y(x)=\frac{5}{(4x-9)^3}.$$

Т4.9. Найдите $g'(2)$, если

$$g(x)=\frac{5}{4x^2-15}.$$

Т4.10. Найдите $y'(-3)$, если

$$y=\frac{7x+2}{2x+7}.$$

Т4.1

Т4.2

Т4.3

Т4.4

Т4.5

Т4.6

Т4.7

Т4.8

Т4.9

Т4.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Ответы:

T5.1

T5.2

T5.3

T5.4

T5.5

T5.6

T5.7

T5.8

T5.9

T5.10

Образец написания: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Тренировочная работа 5

T5.1. Найдите точку минимума функции

$$y = 16 - \frac{16}{x} - x.$$

T5.2. Найдите точку максимума функции

$$y = -\frac{x^2 + 36}{x}.$$

T5.3. Найдите точку минимума функции

$$y = \frac{x^2 + 64}{x}.$$

T5.4. Найдите точку максимума функции

$$y = 7 - 0{,}5x - \frac{2}{x^2}.$$

T5.5. Найдите точку минимума функции

$$y = \frac{4}{x^2} + x + 4.$$

T5.6. Найдите точку максимума функции

$$y = \frac{27}{x} - 0{,}5x^2 + 6.$$

T5.7. Найдите точку минимума функции

$$y = 0{,}5x^2 + \frac{1}{x} + 1{,}5.$$

T5.8. Найдите точку максимума функции

$$y = \frac{16}{x} - x^2 + 9.$$

T5.9. Найдите точку минимума функции

$$y = x^2 - \frac{54}{x} + 45.$$

T5.10. Найдите точку максимума функции

$$y = \frac{128}{x} - x^2 + 100.$$

Тренировочная работа 6

Т6.1. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{x^2+16}{x}$$

на отрезке [2; 8].

Т6.2. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \frac{x^2+7x+49}{x}$$

на отрезке [−14; −1].

Т6.3. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{x^2-6x+36}{x}$$

на отрезке [3; 9].

Т6.4. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \frac{x^2-8x+64}{x}$$

на отрезке [−16; −4].

Т6.5. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{x^2+10x+100}{x}$$

на отрезке [1; 20].

Т6.6. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \frac{x^3+x^2+9}{x} - x^2$$

на отрезке [−9; −1].

Т6.7. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^2 + \frac{25+x^2-x^3}{x}$$

на отрезке [1; 10].

Т6.8. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \frac{16-x^3}{x}$$

на отрезке [−4; −1].

Ответы:

Т6.1

Т6.2

Т6.3

Т6.4

Т6.5

Т6.6

Т6.7

Т6.8

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Ответы:

Т6.9

Т6.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Т6.9. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{x^3 - 54}{x}$$

на отрезке $[-6; -1]$.

Т6.10. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \frac{250 + 50x - x^3}{x}$$

на отрезке $[-10; -1]$.

Иррациональные функции.
Решения задач 5 и 6 диагностической работы

5. Найдите точку максимума функции

$$y = 7 + 6x - 2x^{\frac{3}{2}}.$$

Решение. Найдем производную данной функции:

$$y' = 6 - 3x^{\frac{1}{2}}, \quad y' = 3\left(2 - \sqrt{x}\right).$$

Производная обращается в нуль, если $\sqrt{x} = 2$, т. е. $x = 4$. В точке $x = 4$ производная меняет знак с плюса на минус, следовательно, эта точка и является единственной точкой максимума.

Ответ: 4.

6. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1$$

на отрезке $[1; 9]$.

Решение. Найдем производную данной функции:

$$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 3, \quad y' = \frac{3}{2}\left(\sqrt{x} - 2\right).$$

Производная обращается в нуль, если $\sqrt{x} = 2$, т. е. $x = 4$. В точке $x = 4$ производная меняет знак с минуса на плюс, эта точка является единственной точкой минимума на данном отрезке, и наименьшего значения на этом отрезке функция достигает именно в этой точке. Найдем наименьшее значение:

$$y(4) = 4^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot 4 + 1 = -3.$$

Ответ: -3.

Ответы:

T7.1

T7.2

T7.3

T7.4

T7.5

T7.6

T7.7

T7.8

T7.9

T7.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Тренировочная работа 7

T7.1. Найдите $f'(9)$, если

$$f(x) = 18\sqrt{x}.$$

T7.2. Найдите $g'(8)$, если

$$g(x) = 20\sqrt{x+17}.$$

T7.3. Найдите $f'(2)$, если

$$f(x) = \sqrt{4x-7}.$$

T7.4. Найдите $y'(5)$, если

$$y(x) = 7\sqrt{6x+19}.$$

T7.5. Найдите $y'(1)$, если

$$y(x) = 49x^{\frac{5}{7}}.$$

T7.6. Найдите $g'(18)$, если

$$g(x) = x^{\frac{1}{6}} \cdot x^{\frac{8}{9}} \cdot x^{\frac{17}{18}}.$$

T7.7. Найдите $g'(1)$, если

$$g(x) = 48\sqrt[8]{x}\,\sqrt[12]{x}.$$

T7.8. Найдите $f'(1)$, если

$$f(x) = 15\sqrt[5]{x} + 34\sqrt[17]{x}.$$

T7.9. Найдите $g'(1)$, если

$$g(x) = \frac{x^{7,2} + x^{2,7}}{x^{4,5}}.$$

T7.10. Найдите $y'(1)$, если

$$y = \frac{x^{2,6} - 9}{x^{1,3} - 3}.$$

Ответы:

Тренировочная работа 8

Т8.1. Найдите точку минимума функции
$$y = \frac{4}{3}x\sqrt{x} - 6x + 1.$$

Т8.2. Найдите точку максимума функции
$$y = 2 + 3x - x\sqrt{x}.$$

Т8.3. Найдите точку минимума функции
$$y = x\sqrt{x} - 1{,}5x + 2.$$

Т8.4. Найдите точку максимума функции
$$y = 7 + 8x - \frac{4}{3}x\sqrt{x}.$$

Т8.5. Найдите точку минимума функции
$$y = (x-9)\sqrt{x}.$$

Т8.6. Найдите точку максимума функции
$$y = (6-x)\sqrt{x}.$$

Т8.7. Найдите точку минимума функции
$$y = (x-12)\sqrt{x}.$$

Т8.8. Найдите точку максимума функции
$$y = (15-x)\sqrt{x}.$$

Т8.9. Найдите точку минимума функции
$$y = x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 2.$$

Т8.10. Найдите точку максимума функции
$$y = 11 + 6\sqrt{x} - 2x\sqrt{x}.$$

Т8.1

Т8.2

Т8.3

Т8.4

Т8.5

Т8.6

Т8.7

Т8.8

Т8.9

Т8.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Ответы:

T9.1

T9.2

T9.3

T9.4

T9.5

T9.6

T9.7

T9.8

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Тренировочная работа 9

T9.1. Найдите наименьшее значение функции

$$y=(x-12)\sqrt{x}$$

на отрезке [1; 9].

T9.2. Найдите наибольшее значение функции

$$y=7-6\sqrt{x}-5x^3$$

на отрезке [1; 4].

T9.3. Найдите наименьшее значение функции

$$y=x^3+5\sqrt{x}+7$$

на отрезке [4; 16].

T9.4. Найдите наибольшее значение функции

$$y=(7-x)\sqrt{x+5}$$

на отрезке [−4; 4].

T9.5. Найдите наименьшее значение функции

$$y=(x-11)\sqrt{x+1}$$

на отрезке [0; 8].

T9.6. Найдите наибольшее значение функции

$$y=(10-x)\sqrt{x+2}$$

на отрезке [−1; 7].

T9.7. Найдите наименьшее значение функции

$$y=(x-15)\sqrt{x+12}+6$$

на отрезке [−8; 4].

T9.8. Найдите наибольшее значение функции

$$y=(8-x)\sqrt{x+4}+1$$

на отрезке [−3; 5].

Т9.9. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 2(x-20)\sqrt{x+7}+5$$

на отрезке $[-6; 2]$.

Т9.10. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 5-(x-14)\sqrt{x+13}$$

на отрезке $[-9; 3]$.

Ответы:

Т9.9

Т9.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Тригонометрические функции. Решения задач 7 и 8 диагностической работы

7. Найдите точку минимума функции
$$y = (0{,}5 - x)\cos x + \sin x,$$
принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Сначала найдем производную данной функции, применив правило для вычисления производной произведения двух функций:
$$y' = (0{,}5 - x)'\cos x + (0{,}5 - x)(\sin x)' + (\cos x)',$$
т. е.
$$y' = -\cos x - (0{,}5 - x)\sin x + \cos x,$$
и, следовательно, $y' = -(0{,}5 - x)\sin x$, или $y' = (x - 0{,}5)\sin x$. На промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ производная обращается в нуль только при $x = 0{,}5$, поскольку $\sin x > 0$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. В точке $x = 0{,}5$ производная меняет знак с минуса на плюс, и эта точка является единственной точкой минимума на данном промежутке.

Ответ: 0,5.

8. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 4\sqrt{2}\cos x + 4x - \pi + 4$$
на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Найдем производную данной функции:
$$y' = -4\sqrt{2}\sin x + 4.$$
Производная обращается в нуль, если $4\sqrt{2}\sin x = 4$, т. е. $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Отрезку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ принадлежит единственный корень $x = \frac{\pi}{4}$ полученного уравнения. В точке $x = \frac{\pi}{4}$ производная меняет знак с плюса на минус, эта точка является единственной точкой максимума на данном отрезке, и наибольшего значения на этом отрезке функция достигает именно в этой точке. Найдем наибольшее значение:
$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} + 4\cdot\frac{\pi}{4} - \pi + 4,$$
т. е. $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 8$.

Ответ: 8.

Тренировочная работа 10

T10.1. Найдите $f'\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$, если

$$f(x) = 2\sin x + 7\cos x.$$

T10.2. Найдите $y'\left(\frac{5\pi}{4}\right)$, если

$$y(x) = 9\sqrt{2}\sin x - 7\operatorname{tg} x.$$

T10.3. Найдите $g'\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, если

$$g(x) = 9\operatorname{tg} x - 8\cos x.$$

T10.4. Найдите $y'\left(-\frac{3\pi}{7}\right)$, если

$$y = 3\cos 7x.$$

T10.5. Найдите $f'\left(\frac{1}{13}\right)$, если

$$f(x) = \frac{3}{\pi}\sin(13\pi x).$$

T10.6. Найдите $y'\left(\frac{11\pi}{4}\right)$, если

$$y = 22\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{11}\right).$$

T10.7. Найдите $g'\left(\frac{4\pi}{3}\right)$, если

$$g(x) = \frac{12}{\sin x}.$$

T10.8. Найдите $f'\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, если

$$f(x) = \frac{18}{\cos x}.$$

T10.9. Найдите $y'\left(\frac{\pi}{28}\right)$, если

$$y(x) = \sin^2 7x - \cos^2 7x.$$

T10.10. Найдите $g'\left(\frac{\pi}{36}\right)$, если

$$g(x) = \frac{\sin 24x}{\cos 12x}.$$

Ответы:

T10.1

T10.2

T10.3

T10.4

T10.5

T10.6

T10.7

T10.8

T10.9

T10.10

Образец написания: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Ответы:

T11.1

T11.2

T11.3

T11.4

T11.5

T11.6

T11.7

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Тренировочная работа 11

T11.1. Найдите точку максимума функции
$$y = x\sin x + \cos x - 3\sin x + 1,$$
принадлежащую промежутку $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

T11.2. Найдите точку минимума функции
$$y = (x - 1{,}5)\sin x + \cos x,$$
принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

T11.3. Найдите точку максимума функции
$$y = (6 - 5x)\sin x - 5\cos x + 6,$$
принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

T11.4. Найдите точку минимума функции
$$y = 2\cos x - (1 - 2x)\sin x + 1,$$
принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

T11.5. Найдите точку максимума функции
$$y = 2\cos x - (5 - 2x)\sin x + 4,$$
принадлежащую промежутку $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

T11.6. Найдите точку минимума функции
$$y = x\sin x + \cos x - \frac{3}{4}\sin x,$$
принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

T11.7. Найдите точку максимума функции
$$y = \sin x - 4\cos x - 4x\sin x + 5,$$
принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ответы:

Т11.8. Найдите точку минимума функции

$$y = 3(x - 1{,}25)\sin x + 3\cos x + 2,$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Т11.9. Найдите точку максимума функции

$$y = (2 - 5x)\sin x - 5\cos x + 3,$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Т11.10. Найдите точку минимума функции

$$y = 4\sin x + 2(5 - 2x)\cos x - 7,$$

принадлежащую промежутку $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Т11.8

Т11.9

Т11.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Ответы:

Т12.1

Т12.2

Т12.3

Т12.4

Т12.5

Т12.6

Т12.7

Образец написания: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Тренировочная работа 12

Т12.1. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 9 + \sqrt{3}\pi - 3\sqrt{3}x - 6\cos x$$

на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Т12.2. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 6\sin x - \frac{36}{\pi}x + 7$$

на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$.

Т12.3. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 5\cos x - \frac{24}{\pi}x + 9$$

на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$.

Т12.4. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 9\operatorname{tg} x - 8x + 7$$

на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.

Т12.5. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 4x - 5\operatorname{tg} x - 5\pi + 4$$

на отрезке $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$.

Т12.6. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 5\operatorname{tg} x - 4x + \pi + 9$$

на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

Т12.7. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi - 2\cos x - \sqrt{3}x - 5$$

на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответы:

T12.8. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 2\sin x - \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi + 7$$

на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

T12.9. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 7\sin x + 8\cos x - 17x - 18$$

на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

T12.10. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 4\sin x - 5\cos x + 11x - 13$$

на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

T12.8

T12.9

T12.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Показательная функция. Решения задач 9 и 10 диагностической работы

9. Найдите точку максимума функции

$$y = (x^2 - 17x - 17)e^{7-x}.$$

Решение. Сначала найдем производную данной функции, применив правило для вычисления производной произведения двух функций:

$$y' = (x^2 - 17x - 17)'e^{7-x} + (x^2 - 17x - 17)\left(e^{7-x}\right)',$$

т. е.

$$y' = (2x - 17)e^{7-x} + (x^2 - 17x - 17)\left(-e^{7-x}\right),$$

и, следовательно,

$$y' = -(x^2 - 19x)e^{7-x}, \quad \text{или} \quad y' = -x(x - 19)e^{7-x}.$$

Производная обращается в нуль при $x = 0$ и $x = 19$, причем меняет знак с плюса на минус в точке $x = 19$. Эта точка и является единственной точкой максимума.

Ответ: 19.

10. Найдите наименьшее значение функции

$$y = (x - 13)e^{x-12}$$

на отрезке [11; 13].

Решение. Сначала найдем производную данной функции, применив правило для вычисления производной произведения двух функций:

$$y' = (x - 13)'e^{x-12} + (x - 13)(e^{x-12})',$$

т. е.

$$y' = e^{x-12} + (x - 13)e^{x-12},$$

и, следовательно, $y' = (x - 12)e^{x-12}$. В точке $x = 12$ производная меняет знак с минуса на плюс, эта точка является единственной точкой минимума на данном отрезке, и наименьшего значения на этом отрезке функция достигает именно в этой точке. Найдем наименьшее значение:

$$y(12) = (12 - 13)e^{12-12} = -1.$$

Ответ: -1.

Тренировочная работа 13

Т13.1. Найдите $f'(2)$, если

$$f(x) = \frac{7^x}{\ln 7}.$$

Т13.2. Найдите $y'(-2)$, если

$$y = \frac{2^x \cdot 5^x}{\ln 10}.$$

Т13.3. Найдите $f'(-6)$, если

$$f(x) = \frac{6^{x+8}}{\ln 6}.$$

Т13.4. Найдите $y'(-2)$, если

$$y = \frac{9^{-x}}{\ln 9}.$$

Т13.5. Найдите $f'(14)$, если

$$f(x) = \frac{7 \cdot 6^{\frac{x}{7}}}{\ln 6}.$$

Т13.6. Найдите $y'(-2{,}5)$, если

$$y = e^{2x+5}.$$

Т13.7. Найдите $f'(-18)$, если

$$f(x) = (x+8)e^{x+18}.$$

Т13.8. Найдите $f'(4)$, если

$$f(x) = \frac{x+3}{e^{x-4}}.$$

Т13.9. Найдите $y'(2)$, если

$$y = \frac{7^{3x-5}}{\ln 7}.$$

Т13.10. Найдите $y'(5)$, если

$$y = \frac{15\sqrt[5]{15^x}}{\ln 15}.$$

Ответы:

Т13.1

Т13.2

Т13.3

Т13.4

Т13.5

Т13.6

Т13.7

Т13.8

Т13.9

Т13.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Ответы:

T14.1

T14.2

T14.3

T14.4

T14.5

T14.6

T14.7

T14.8

T14.9

T14.10

Образец написания:

Тренировочная работа 14

T14.1. Найдите точку минимума функции

$$y = (x^2 - 5x + 5)e^{x-5}.$$

T14.2. Найдите точку максимума функции

$$y = (x^2 - 8x + 8)e^{x-8}.$$

T14.3. Найдите точку минимума функции

$$y = (x^2 - 15x + 15)e^{x-15}.$$

T14.4. Найдите точку максимума функции

$$y = (x+3)^2 e^{3-x}.$$

T14.5. Найдите точку минимума функции

$$y = -(x-4)^2 e^{x-4}.$$

T14.6. Найдите точку максимума функции

$$y = (x-6)^2 e^{x-6}.$$

T14.7. Найдите точку минимума функции

$$y = (4-x)e^{5-x}.$$

T14.8. Найдите точку максимума функции

$$y = (x-6)e^{7-x}.$$

T14.9. Найдите точку минимума функции

$$y = (x^2 - 3)e^{x-3}.$$

T14.10. Найдите точку максимума функции

$$y = (x^2 + 2x + 1)e^{x+4}.$$

Тренировочная работа 15

Т15.1. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 8 + (x-7)e^{x-6}$$
на отрезке [3; 9].

Т15.2. Найдите наибольшее значение функции
$$y = (x-11)e^{12-x} + 13$$
на отрезке [5; 15].

Т15.3. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 5 - (x-3)e^{4-x}$$
на отрезке [0; 7].

Т15.4. Найдите наибольшее значение функции
$$y = (x-4)^2 e^{x-2}$$
на отрезке [1; 3].

Т15.5. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 2 - (x-3)^2 e^{5-x}$$
на отрезке [4; 6].

Т15.6. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 6 + (x-7)^2 e^{x-5}$$
на отрезке [4; 6].

Т15.7. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 4 - (x-4)^2 e^{x-2}$$
на отрезке [1; 3].

Т15.8. Найдите наибольшее значение функции
$$y = (x-6)^2 e^{8-x}$$
на отрезке [7; 9].

Т15.9. Найдите наименьшее значение функции
$$y = (x^2 - 5x + 5)e^{x-3}$$
на отрезке [1; 5].

Т15.10. Найдите наибольшее значение функции
$$y = (3 - x^2)e^{x-1}$$
на отрезке [0; 2].

Ответы:

Т15.1

Т15.2

Т15.3

Т15.4

Т15.5

Т15.6

Т15.7

Т15.8

Т15.9

Т15.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Логарифмическая функция. Решения задач 11 и 12 диагностической работы

11. Найдите точку минимума функции

$$y = x - 5\ln x.$$

Решение. Функция определена на $(0; +\infty)$. Найдем производную данной функции:

$$y' = 1 - \frac{5}{x},$$

т. е.

$$y' = \frac{x-5}{x}.$$

Производная меняет знак в единственной точке $x = 5$, причем знак производной в этой точке меняется с минуса на плюс. Следовательно, эта точка и является единственной точкой минимума данной функции.

Ответ: 5.

12. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 5 - 7x + 7\ln(x+3)$$

на отрезке $[-2{,}5; 0]$.

Решение. Найдем производную данной функции:

$$y' = -7 + \frac{7}{x+3},$$

т. е.

$$y' = -7\frac{x+2}{x+3}.$$

Производная меняет знак в единственной точке $x = -2$, причем знак производной в этой точке меняется с плюса на минус. Эта точка является единственной точкой максимума на данном отрезке, и наибольшего значения на этом отрезке функция достигает именно в этой точке. Найдем наибольшее значение:

$$y(-2) = 5 - 7 \cdot (-2) + 7\ln(-2+3) = 19.$$

Ответ: 19.

Тренировочная работа 16

Т16.1. Найдите $f'(7)$, если
$$f(x) = 28\ln x.$$

Т16.2. Найдите $y'(-7)$, если
$$y = 15\ln(x+10).$$

Т16.3. Найдите $f'(5)$, если
$$f(x) = \ln(6x-5).$$

Т16.4. Найдите $y'(5)$, если
$$y = \ln\frac{x-4}{x+5}.$$

Т16.5. Найдите $f'(-4)$, если
$$f(x) = 5x + 4\ln(x+6).$$

Т16.6. Найдите $y'(5)$, если
$$y = 3x\ln(x-4).$$

Т16.7. Найдите $f'(-2)$, если
$$f(x) = 4x^2\ln(x+3).$$

Т16.8. Найдите $f'(2)$, если
$$f(x) = \frac{\ln(x-1)}{x+2}.$$

Т16.9. Найдите $y'(3)$, если
$$y = 6x + \log_5(x+5) - \frac{x^2}{48\ln 5}.$$

Т16.10. Найдите $y'(6)$, если
$$y = 5x^2 + \frac{x}{\ln 7} - 6\log_7 x.$$

Ответы:

Т16.1

Т16.2

Т16.3

Т16.4

Т16.5

Т16.6

Т16.7

Т16.8

Т16.9

Т16.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Ответы:

Т17.1

Т17.2

Т17.3

Т17.4

Т17.5

Т17.6

Т17.7

Т17.8

Т17.9

Т17.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Тренировочная работа 17

Т17.1. Найдите точку максимума функции
$$y = 2\ln x - 5x + 7.$$

Т17.2. Найдите точку максимума функции
$$y = \ln(x-8) - x + 5.$$

Т17.3. Найдите точку минимума функции
$$y = x - \ln(x-7) + 7.$$

Т17.4. Найдите точку максимума функции
$$y = 4\ln(x-3) - 2x + 3.$$

Т17.5. Найдите точку минимума функции
$$y = 2x - 5\ln(x-7).$$

Т17.6. Найдите точку максимума функции
$$y = 18\ln x - x^2.$$

Т17.7. Найдите точку минимума функции
$$y = 2x - 7\ln(x-8) + 5.$$

Т17.8. Найдите точку максимума функции
$$y = \ln(x+5) - 5x + 5.$$

Т17.9. Найдите точку минимума функции
$$y = (x-3)^2 - 8\ln x.$$

Т17.10. Найдите точку максимума функции
$$y = 6\ln x - (x-2)^2.$$

Ответы:

Тренировочная работа 18

Т18.1. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 5x - \ln(x+5)^5$$

на отрезке $[-4{,}5; 1]$.

Т18.2. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 3\ln(x+2) - 3x + 10$$

на отрезке $[-1{,}5; 0]$.

Т18.3. Найдите наименьшее значение функции

$$y = -x^2 + 20x - 18\ln x$$

на отрезке $[0{,}1; 8{,}1]$.

Т18.4. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 7 - 7x + \ln(7x)$$

на отрезке $\left[\frac{1}{13}; \frac{1}{3}\right]$.

Т18.5. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^2 - 2\ln x + 1$$

на отрезке $[0{,}3; 3{,}3]$.

Т18.6. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \ln(13x) - 13x + 13$$

на отрезке $\left[\frac{1}{15}; \frac{1}{11}\right]$.

Т18.7. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 3x^2 - 11x + 5\ln x + 7$$

на отрезке $\left[\frac{11}{12}; \frac{13}{12}\right]$.

Т18.8. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 7 - \ln x + 5x - 2x^2$$

на отрезке $\left[\frac{1}{2}; \frac{7}{6}\right]$.

Т18.1

Т18.2

Т18.3

Т18.4

Т18.5

Т18.6

Т18.7

Т18.8

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Ответы:

T18.9

T18.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

T18.9. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 3x^2 - 10x + 4\ln x$$

на отрезке [0,8; 1,2].

T18.10. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 3 - x^2 + 7x - 5\ln x$$

на отрезке $\left[\frac{1}{8}; \frac{9}{8}\right]$.

§ 2. Вычисление наибольших и наименьших значений функций без применения производной

Общие замечания

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции (как, впрочем, и любой другой алгоритм) не является единственным способом решения предложенной задачи. Можно, например, исследовать функцию на монотонность на данном отрезке и, исходя из этого исследования, найти наибольшее и наименьшее значения. Для того чтобы найти наибольшее и наименьшее значения линейной или квадратичной функции на отрезке, вовсе не обязательно применять алгоритм исследования функции с помощью производной: достаточно ограничиться известными свойствами линейной и квадратичной функций. Например, для функции $y=-7x+3$ наибольшим и наименьшим значениями на отрезке $[-1; 2]$ будут соответственно числа $y(-1)=10$ и $y(2)=-11$, так как функция убывает на данном отрезке. При вычислении наибольшего и наименьшего значений функции $y=x^2-2x-5$ на отрезке $[0; 7]$ можно поступить следующим образом. Абсцисса $x_0=1$ вершины параболы, являющейся графиком квадратичной функции $y=x^2-2x-5$, принадлежит отрезку $[0; 7]$, поэтому наименьшего значения эта функция достигает в точке $x_0=1$ (это значение: $y(1)=-6$), а наибольшего — в том из концов отрезка $[0; 7]$, который наиболее удален от x_0, т. е. при $x=7$ (это значение легко вычислить: $y(7)=30$).

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=2\sin 3x+1$ на отрезке $[2000; 2011]$, достаточно заметить, что длина данного отрезка больше периода функции и, следовательно, наибольшее и наименьшее значения функции на данном отрезке равны соответственно 3 и -1 — наибольшему и наименьшему значениям функции на всей области определения. Решение задачи с применением алгоритма в данном случае окажется существенно более долгим и сложным.

Найдем теперь наибольшее значение непрерывной на всей числовой прямой функции

$$y = 3|x+4|-11|x-5|+|2x-17|-5x-9.$$

Здесь нужно обратить внимание на то, что при $x>5$ второй модуль «раскрывается» со знаком «плюс» и при любом «раскрытии» остальных модулей коэффициент при x будет отрицательным, так как $\pm3-11\pm2-5<0$. Аналогично при $x<5$ второй модуль «раскрывается» со знаком «минус», и при любом «раскрытии» остальных модулей коэффициент при x будет положительным, так как $\pm3+11\pm2-5>0$. Значит, график функции состоит из частей (отрезков или лучей) прямых $y=k_ix+b_i$, где $k_i>0$ при $x<5$ и $k_i<0$ при $x>5$. Поэтому на промежутке $(-\infty; 5]$ данная функция возрастает, а на промежутке $[5; +\infty)$ убывает, и своего наибольшего значения она достигает в точке $x=5$. Это значение равно $y(5)=3|5+4|-11|5-5|+|2\cdot5-17|-5\cdot5-9=0$. Ключом к решению этой задачи послужило то, что модуль коэффициента при переменной у одного из слагаемых оказался больше любой комбинации сумм и разностей остальных таких коэффициентов. Это позволило сделать вывод о промежутках возрастания и убывания функции. В том случае, если знак такого коэффициента определяется однозначно, решение может оказаться еще проще.

Прежде чем переходить к систематическому изложению методов вычисления наибольших и наименьших значений функции без применения производной, рассмотрим еще один пример: найдем наименьшее и наибольшее значения функции $y=2|x-2|+3|x-3|+4|x-4|+5|x-5|+15x+16$ на отрезке $[0; 6]$. Заметим, что при любом «раскрытии» модулей коэффициент при переменной будет положительным, так как $\pm 2\pm 3\pm 4\pm 5+15>0$. Значит, график функции состоит из частей (отрезков или лучей) прямых $y=k_ix+b_i$, где $k_i>0$. Следовательно, данная функция возрастает на всей числовой прямой и, в частности, на отрезке $[0; 6]$. Поэтому

$$\min_{[0;6]} y(x)=y(0)=70, \quad \max_{[0;6]} y(x)=y(6)=136.$$

Замена переменной

В некоторых более сложных случаях наибольшее и наименьшее значения функции также можно вычислять без использования производной. Найдем, например, наибольшее и наименьшее значения функции $y=\cos 2x+\sin x$ на отрезке $[0; \pi]$. Воспользовавшись формулой двойного аргумента, получим, что $y=-2\sin^2 x+\sin x+1$. Пусть $\sin x=t$. По условию $x\in[0; \pi]$, поэтому $t\in[0; 1]$. Таким образом, задача сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значений квадратичной функции $y=-2t^2+t+1$ на отрезке $[0; 1]$. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вниз. Абсцисса вершины параболы $t_0=\frac{1}{4}$ принадлежат отрезку $[0; 1]$. Поэтому наибольшее значение достигается в точке t_0, а наименьшее — в том из концов отрезка $[0; 1]$, который наиболее удален от точки t_0, т. е.

$$\max_{[0;1]} y(t)=y\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{8}, \quad \min_{[0;1]} y(t)=y(1)=0.$$

Соответствующие значения x находятся из уравнений $\sin x=\frac{1}{4}$ и $\sin x=1$ при условии $x\in[0; \pi]$.

Аналогично нахождение множества значений функции $y=5\cos^2 x-3\cos x+1$ сводится к нахождению множества значений функции $f(t)=5t^2-3t+1$ на отрезке $[-1; 1]$. Наибольшее и наименьшее значения функции $f(t)$ достигаются в точках $t=-1$ и $t=0{,}3$ соответственно и равны $f(-1)=9$ и $f(0{,}3)=0{,}55$. Таким образом, множеством значений функции $y=5\cos^2 x-3\cos x+1$ является отрезок $[0{,}55; 9]$.

Вообще, с помощью подходящей замены переменной решение многих задач на вычисление наибольших и наименьших значений функции может быть сведено к исследованию квадратного трехчлена на некотором промежутке.

Пример 1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=9^x-2\cdot 3^x$ на отрезке $[-1; 2]$.

Решение. Пусть $t=3^x$. По условию $-1\leqslant x\leqslant 2$, поэтому $\frac{1}{3}\leqslant t\leqslant 9$, $y=t^2-2t$. Таким образом, решение задачи сводится к вычислению наибольшего и наименьшего значений квадратичной функции $f(t)=t^2-2t$ на отрезке $\left[\frac{1}{3};9\right]$. Ветви параболы, являющейся графиком этой функции направлены вверх, а абсцисса вершины $t_0=1$ принадлежит отрезку $\left[\frac{1}{3};9\right]$, поэтому $\min\limits_{\left[\frac{1}{3};9\right]} y(t)=y(1)=-1$, а максимальное значение достигается на том конце отрезка, который наиболее удален от t_0, т. е. $\max\limits_{\left[\frac{1}{3};9\right]} f(t)=f(9)=63$. Если $t=1$, то $x=0$; если $t=9$, то $x=2$. Поэтому $\max\limits_{[-1;2]} y(x)=y(2)=63$, $\min\limits_{[-1;2]} y(x)=y(0)=-1$.

Ответ: $\max\limits_{[-1;2]} y(x)=y(2)=63$, $\min\limits_{[-1;2]} y(x)=y(0)=-1$.

Пример 2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=2\sin x-\cos 2x+\cos^2 x.$$

Решение. Используя формулы $\cos 2x=1-2\sin^2 x$, $\cos^2 x=1-\sin^2 x$, получаем, что $y=\sin^2 x+2\sin x$. Пусть $t=\sin x$, $-1\leqslant t\leqslant 1$. Тогда решение задачи сводится к вычислению наибольшего и наименьшего значений квадратичной функции $y=t^2+2t$ на отрезке $[-1;1]$. Пусть t_0 — абсцисса вершины параболы являющейся графиком функции $f(t)=t^2+2t$, $t_0=-1$, ветви параболы направлены вверх и, следовательно, на $[-1;1]$ функция $f(t)=t^2+2t$ возрастает. Поэтому

$$\min_{[-1;1]} f(t)=f(-1)=-1,\quad \max_{[-1;1]} f(t)=f(1)=3.$$

Если $t=-1$, то $\sin x=-1 \iff x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. Если $t=1$, то $\sin x=1 \iff x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $\max\limits_{\mathbb{R}} y(x)=3$ достигается при $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, $\min\limits_{\mathbb{R}} y(x)=-1$ достигается при $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Пример 3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=6\sqrt{2x-3}-2x$ на отрезке $[2;8]$.

Решение. Пусть $t=\sqrt{2x-3}$. По условию $2\leqslant x\leqslant 8$, поэтому $1\leqslant t\leqslant\sqrt{13}$. При этом $2x=t^2+3$, т. е.

$$y=6t-t^2-3=-t^2+6t-3.$$

Таким образом, задача сводится к вычислению наибольшего и наименьшего значений квадратичной функции $f(t)=-t^2+6t-3$ на отрезке $\left[1;\sqrt{13}\right]$. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вниз, абсцисса t_0 вершины параболы равна 3. Так как $t_0\in\left[1;\sqrt{13}\right]$, получаем, что

$$\max_{[1;\sqrt{13}]} f(t)=f(3)=6,$$

а наименьшее значение достигается в том из концов отрезка $[1;\ \sqrt{13}]$, который наиболее удален от t_0, т. е.

$$\min_{[1;\sqrt{13}]} f(t) = f(1) = 2.$$

Если $t=3$, то $x=\dfrac{t^2+3}{2}=6$; если $t=1$, то $x=2$.

Ответ: $\min\limits_{[2;8]} y(x)=y(2)=2$, $\max\limits_{[2;8]} y(x)=y(6)=6$.

Пример 4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \cos x + 4\sqrt{2-\cos x} - 6.$$

Решение. Пусть $t=\sqrt{2-\cos x}$. Тогда

$$1 \leqslant t \leqslant \sqrt{3}, \quad \cos x = 2-t^2,$$

$$y = 2-t^2+4t-6 = -t^2+4t-4 = -(t-2)^2.$$

Решение задачи свелось к вычислению наибольшего и наименьшего значений квадратичной функции $f(t)=-(t-2)^2$ на отрезке $[1;\ \sqrt{3}]$. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вниз. Абсцисса t_0 вершины параболы равна 2, т. е. $t_0 > \sqrt{3}$. Поэтому на $[1;\ \sqrt{3}]$ функция $f(t) = -(t-2)^2$ является возрастающей. Следовательно,

$$\min_{[1;\sqrt{3}]} f(t) = y(1) = -1,$$

$$\max_{[1;\sqrt{3}]} f(t) = y(\sqrt{3}) = -(\sqrt{3}-2)^2 = 4\sqrt{3}-7.$$

Если $t=1$, то $\cos x=1 \iff x=2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. Если $t=\sqrt{3}$, то $\cos x=-1 \iff x=\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $\min\limits_{\mathbb{R}} y(x)=-1$ достигается при $x=2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $\max\limits_{\mathbb{R}} y(x)=4\sqrt{3}-7$ достигается при $x=\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Пример 5. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = 4x+6|x-2|-x^2 \quad \text{на отрезке } [-1; 3].$$

Решение. Имеем

$$y = -(x^2-4x+4-4)+6|x-2| = -(x-2)^2+6|x-2|+4.$$

Так как $a^2=|a|^2$, можем записать $y=-|x-2|^2+6|x-2|+4$. Пусть $t=|x-2|$. По условию $-1\leqslant x\leqslant 3$, поэтому $0\leqslant t\leqslant 3$. При этом $y=-t^2+6t+4$, и задача сводится к вычислению наибольшего и наименьшего значений квадратичной функции $f(t)=-t^2+6t+4$ на отрезке $[0; 3]$. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вниз, абсцисса t_0 вершины равна 3. Поэтому на отрезке $[0; 3]$ функция $f(t) = -t^2 + 6t + 4$ возрастает, и, следовательно,

$$\min_{[0;3]} f(t) = f(0) = 4, \quad \max_{[0;3]} f(t) = f(3) = 13.$$

Если $t = 0$, то $x = 2$. Если $t = 3$, то $|x - 2| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 5. \end{array}\right.$ Но по условию $x \in [-1; 3]$, поэтому остается только значение $x = -1$.

Ответ: $\min\limits_{[-1;3]} y(x) = y(2) = 4$, $\max\limits_{[-1;3]} y(x) = y(-1) = 13$.

Следует отметить, что замена переменной может существенно упростить решение задачи и в тех случаях, когда без применения производной обойтись уже невозможно. Так, вычисление наибольшего и наименьшего значений функции $y = \cos x \sin 2x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ с помощью замены переменной $t = \sin x$ можно свести к вычислению наибольшего и наименьшего значений функции $z = 2t - 2t^3$ на отрезке $[-1; 1]$. И в том, и в другом случае нужно использовать стандартный алгоритм вычисления наибольшего и наименьшего значений функции, заданной на отрезке, но для функции $z = 2t - 2t^3$ вычисления будут существенно проще.

Применение стандартных неравенств

Неравенство Коши для двух чисел

Напомним, что для любых двух неотрицательных чисел a и b справедливо неравенство, называемое неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим этих чисел (неравенство Коши):

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \tag{1}$$

(среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического). Это неравенство легко получить из очевидного неравенства $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geqslant 0$, выполнив возведение в квадрат и перенеся квадратный корень в правую часть. Знак равенства в формуле (1) достигается в том и только том случае, когда $a = b$.

Важным следствием неравенства Коши является следующее: для любых положительных чисел a и b и любого отличного от нуля действительного числа t выполняется неравенство

$$\left|at + \frac{b}{t}\right| \geqslant 2\sqrt{ab}, \tag{2}$$

причем знак равенства достигается в том и только том случае, когда $at = \frac{b}{t}$, т. е. $t^2 = \frac{b}{a}$.

Докажем неравенство (2). Пусть $t>0$. Тогда в силу неравенства (1) имеем

$$at+\frac{b}{t}\geqslant 2\sqrt{at\cdot\frac{b}{t}},$$

т. е.

$$at+\frac{b}{t}\geqslant 2\sqrt{ab}\quad \text{при } t>0. \tag{3}$$

Знак равенства достигается, если $t=\sqrt{\frac{b}{a}}$.

Пусть $t<0$. Тогда $-t>0$ и в силу неравенства (3) имеем

$$a(-t)+\frac{b}{(-t)}\geqslant 2\sqrt{ab} \iff at+\frac{b}{t}\leqslant -2\sqrt{ab}\quad \text{при } t<0. \tag{4}$$

Знак равенства достигается, если $t=-\sqrt{\frac{b}{a}}$. Неравенства (3) и (4) можно объединить в одно неравенство (2).

Пример 6. Найдите наименьшее значение функции

$$y=3^{2x-1}+4\cdot 3^{3-2x}.$$

Решение. Так как числа 3^t и $4\cdot 3^z$ положительные при любых действительных значениях t и z, применив неравенство (1), получим

$$y=3^{2x-1}+4\cdot 3^{3-2x}\geqslant 2\sqrt{3^{2x-1}\cdot 4\cdot 3^{3-2x}}=2\sqrt{3^2\cdot 4}=12.$$

Таким образом, $y(x)\geqslant 12$ при любом действительном x, причем знак равенства достигается, лишь если

$$3^{2x-1}=4\cdot 3^{3-2x} \iff 3^{4x-4}=4 \iff x=\frac{4+\log_3 4}{4}.$$

Ответ: $\min\limits_{\mathbb{R}} y(x)=y\left(\frac{4+\log_3 4}{4}\right)=12.$

Пример 7. Найдите наибольшее значение функции

$$y=4\cdot\frac{x^2-x+1}{2x-1}\quad \text{на интервале } \left(-\infty;\frac{1}{2}\right).$$

Решение.

$$y=4\cdot\frac{x^2-x+1}{2x-1}=\frac{4x^2-4x+4}{2x-1}=\frac{(2x-1)^2+3}{2x-1}=2x-1+\frac{3}{2x-1}.$$

По условию $x<\frac{1}{2}$, поэтому $2x-1<0$ и $\frac{3}{2x-1}<0$. Воспользуемся неравенством (2) для случая $t<0$. Тогда

$$y=2x-1+\frac{3}{2x-1}\leqslant -2\sqrt{3},$$

причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} 2x-1=\dfrac{3}{2x-1}, \\ 2x-1<0. \end{cases}$$

Из последней системы находим $x=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\max\limits_{\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)} y(x)=y\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)=-2\sqrt{3}$.

Пример 8. Найдите наименьшее значение функции

$$y=\frac{4\sin^2 x}{2\sin x-1} \quad \text{на интервале } \left(\frac{13}{6}\pi;\ \frac{17}{6}\pi\right).$$

Решение.

$$y=\frac{4\sin^2 x-1+1}{2\sin x-1}=\frac{(2\sin x-1)(2\sin x+1)+1}{2\sin x-1}=$$
$$=2\sin x+1+\frac{1}{2\sin x-1}=2\sin x-1+\frac{1}{2\sin x-1}+2.$$

По условию $\frac{13}{6}\pi<x<\frac{17}{6}\pi$, т. е. $\frac{\pi}{6}+2\pi<x<\frac{5}{6}\pi+2\pi$, а значит, $\sin x>\frac{1}{2}$. Воспользуемся неравенством (2) для случая $t>0$:

$$y=2\sin x-1+\frac{1}{2\sin x-1}+2\geqslant 2\sqrt{(2\sin x-1)\cdot\frac{1}{2\sin x-1}}+2=4.$$

Таким образом, $y\geqslant 4$, причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} (2\sin x-1)^2=1, \\ \sin x>\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \sin x=1.$$

С учетом того, что $\frac{13}{6}\pi<x<\frac{17}{6}\pi$, получим $x=\frac{\pi}{2}+2\pi=\frac{5}{2}\pi$.

Ответ: $\min\limits_{\left(\frac{13}{6}\pi;\frac{17}{6}\pi\right)} y=y\left(\frac{5}{2}\pi\right)=4$.

Пример 9. Найдите наибольшее значение функции

$$y=\sqrt{x^3(2-x^3)}.$$

Решение. Заметим, что $D(y)=[0;\ \sqrt[3]{2}]$. При $x\in[0;\ \sqrt[3]{2}]$ выполнены, очевидно, неравенства $x^3\geqslant 0$, $2-x^3\geqslant 0$. Применим неравенство (1):

$$y=\sqrt{x^3(2-x^3)}\leqslant\frac{x^3+2-x^3}{2}=1.$$

Поэтому $y \leqslant 1$, причем знак равенства достигается, лишь если

$$\begin{cases} x^3 = 2 - x^3, \\ 0 \leqslant x \leqslant \sqrt[3]{2} \end{cases} \Leftrightarrow \ x = 1.$$

Ответ: $\max y(x) = y(1) = 1$.

Пример 10. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \log_3 x \log_3 \frac{9}{x} + 1 \quad \text{на } [1; 9].$$

Решение. При $x \in [1; 9]$ справедливы неравенства

$$\log_3 x \geqslant 0, \quad \log_3 \frac{9}{x} \geqslant 0.$$

Воспользуемся неравенством (1), возводя обе его части в квадрат. Тогда

$$y = \log_3 x \log_3 \frac{9}{x} + 1 \leqslant \left(\frac{\log_3 x + \log_3 \frac{9}{x}}{2} \right)^2 + 1 = \left(\frac{\log_3 9}{2} \right)^2 + 1 = 2.$$

Итак, $y \leqslant 2$, причем знак равенства достигается, лишь если

$$\begin{cases} \log_3 x = \log_3 \frac{9}{x}, \\ 1 \leqslant x \leqslant 9 \end{cases} \Leftrightarrow \ x = 3.$$

Ответ: $\max\limits_{[1;9]} y(x) = y(3) = 2$.

Заметим, что неравенство $ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ справедливо для любых действительных чисел a и b.

Неравенство $|a| + |b| \geqslant |a + b|$

Напомним, что для любых двух действительных чисел a и b справедливо неравенство

$$|a| + |b| \geqslant |a + b|, \tag{5}$$

причем знак равенства достигается в том и только том случае, когда $ab \geqslant 0$.

Доказать неравенство (5) можно различными способами. Приведем один из них. Из очевидного неравенства $|a||b| \geqslant ab$ (знак равенства достигается только в том случае, когда числа a и b имеют одинаковые знаки, т. е. когда $ab \geqslant 0$) следует, что

$$2|a||b| \geqslant 2ab \Rightarrow a^2 + b^2 + 2|a||b| \geqslant a^2 + b^2 + 2ab \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \geqslant a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (|a| + |b|)^2 \geqslant (a + b)^2 \Rightarrow |a| + |b| \geqslant |a + b|,$$

что и требовалось.

Рассмотрим несколько примеров на применение неравенства (5).

Пример 11. Найдите наименьшее значение функции

$$y = |x^2 - x| + |x+1|.$$

Решение. В силу неравенства (5) имеем

$$y = |x^2 - x| + |x+1| \geqslant |x^2 - x + x + 1| = |x^2+1| = x^2+1 \geqslant 1.$$

Таким образом, $y \geqslant 1$, причем знак равенства достигается только в том случае, когда одновременно выполнены равенства $|x^2-x|+|x+1|=|x^2+1|$ и $x^2+1=1$, т. е. $x=0$.

Ответ: $\min\limits_{\mathbb{R}} y(x) = y(0) = 1$.

Пример 12. Найдите наименьшее значение функции

$$y = |x-1| + |x-2| + |x-3|.$$

Решение. Имеем

$$y = |x-1| + |x-2| + |x-3| = |-x+1| + |x-3| + |x-2| \geqslant$$
$$\geqslant |-x+1+x-3| + |x-2| = 2 + |x-2| \geqslant 2,$$

причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} |-x+1|+|x-3| = 2, \\ 2+|x-2| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-x)(x-3) \geqslant 0, \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ: $\min\limits_{\mathbb{R}} y(x) = y(2) = 2$.

Пример 13. Найдите наименьшее значение функции

$$y = |\log_2 x| + \left|\log_2 \frac{4}{x}\right| + \log_2^2(x-1).$$

Решение. Область определения функции: $D(y) = (1; \infty)$. При $x > 1$ имеем

$$y = |\log_2 x| + \left|\log_2 \frac{4}{x}\right| + \log_2^2(x-1) \geqslant \left|\log_2 x + \log_2 \frac{4}{x}\right| + \log_2^2(x-1) = 2 + \log_2^2(x-1) \geqslant 2,$$

причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} |\log_2 x| + \left|\log_2 \frac{4}{x}\right| = \left|\log_2 x + \log_2 \frac{4}{x}\right|, \\ \log_2^2(x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \cdot \log_2 \frac{4}{x} \geqslant 0, \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ: $\min\limits_{(1;\infty)} y(x) = y(2) = 2$.

Неравенство $|a\sin t + b\cos t| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$

Неравенство

$$|a\sin t + b\cos t| \leqslant \sqrt{a^2+b^2} \tag{6}$$

может быть доказано разными способами, наиболее распространенным из которых является введение вспомогательного угла φ:

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

При этом

$$|a\sin t + b\cos t| = \sqrt{a^2+b^2}\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t\right| =$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\,|\sin t\cos\varphi + \cos t\sin\varphi| = \sqrt{a^2+b^2}\,|\sin(t+\varphi)| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}.$$

Знак равенства достигается, лишь если

$$|\sin(t+\varphi)| = 1 \iff t+\varphi = \frac{\pi}{2}+\pi k, \quad k\in\mathbb{Z} \iff t = \frac{\pi}{2}-\varphi+\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Таким образом, функция $y(t) = a\sin t + b\cos t$ достигает наибольшего значения, равного $\sqrt{a^2+b^2}$, при

$$t = \frac{\pi}{2} - \varphi + 2\pi k, \quad k\in\mathbb{Z},$$

и наименьшего значения, равного $-\sqrt{a^2+b^2}$, при $t = -\frac{\pi}{2} - \varphi + 2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, где $\varphi = \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Пример 14. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sin 3x + \cos 3x - 2$.

Решение. Применим неравенство (6) к данной функции:

$$-\sqrt{2}-2 \leqslant \sin 3x + \cos 3x - 2 \leqslant \sqrt{2}-2.$$

Таким образом, $\max\limits_{\mathbb{R}} y(x) = \sqrt{2}-2$. При этом

$$3x = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\pi k, \quad k\in\mathbb{Z},$$

т. е.

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Соответственно $\min\limits_{\mathbb{R}} y(x) = -\sqrt{2} - 2$. При этом

$$3x = -\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

т. е. $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\max\limits_{\mathbb{R}} y(x) = \sqrt{2} - 2$ достигается при $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\min\limits_{\mathbb{R}} y(x) = -\sqrt{2} - 2$ достигается при $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 15. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \sin x(\sin x + \cos x) + \sqrt{2}\cos x.$$

Решение. Из неравенства (6) следует, что $\sin x + \cos x \leqslant \sqrt{2}$. Но тогда

$$y = \sin x(\sin x + \cos x) + \sqrt{2}\cos x \leqslant \sqrt{2}\sin x + \sqrt{2}\cos x = \sqrt{2}(\sin x + \cos x) \leqslant \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2.$$

Таким образом, $\max\limits_{\mathbb{R}} y(x) = 2$. При этом

$$x = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

т. е. $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\max\limits_{\mathbb{R}} y(x) = 2$ достигается при $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 16. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \sin 2x\sqrt{\cos 2x} + \cos 2x\sqrt{\sin 2x}.$$

Решение. Для любого $x \in D(y)$ получим в соответствии с неравенством (6), что

$$y = \sin 2x\sqrt{\cos 2x} + \cos 2x\sqrt{\sin 2x} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{(\sqrt{\cos 2x})^2 + (\sqrt{\sin 2x})^2} = \sqrt{\cos 2x + \sin 2x} \leqslant \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}.$$

Таким образом, $\max y(x) = \sqrt[4]{2}$. При этом

$$2x = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

т. е. $x = \frac{\pi}{8} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Заметим, что эти значения x, очевидно, принадлежат области определения функции.

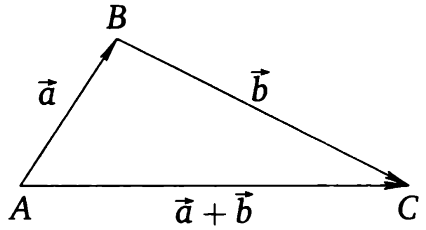
Ответ: $\max y(x) = \sqrt[4]{2}$ достигается при $x = \frac{\pi}{8} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Неравенство $|\vec{a}|+|\vec{b}|\geqslant|\vec{a}+\vec{b}|$

Неравенство

$$|\vec{a}|+|\vec{b}| \geqslant |\vec{a}+\vec{b}| \tag{7}$$

по существу представляет собой не что иное, как неравенство треугольника (см. рисунок):



$$AB=|\vec{a}|,\quad BC=|\vec{b}|,\quad AC=|\vec{a}+\vec{b}|,\quad AC\leqslant AB+BC.$$

Знак равенства достигается тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, т. е. когда отношения их соответствующих координат равны между собой и равны отношению их длин (модулей).

Пример 17. Найдите наименьшее значение функции

$$y=\sqrt{(x-3)^2+1}+\sqrt{(x-2)^2+4}.$$

Решение. Введем векторы $\vec{a}=\{3-x;\,1\}$ и $\vec{b}=\{x-2;\,2\}$. Тогда

$$|\vec{a}|=\sqrt{(x-3)^2+1},\quad |\vec{b}|=\sqrt{(x-2)^2+4},$$

$$\vec{a}+\vec{b}=\{1;3\},\quad |\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}.$$

Используя неравенство $|\vec{a}|+|\vec{b}|\geqslant|\vec{a}+\vec{b}|$, получаем, что $y(x)\geqslant\sqrt{10}$. Знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, т. е. когда

$$\frac{3-x}{x-2}=\frac{1}{2}\iff 6-2x=x-2\iff x=\frac{8}{3}.$$

Ответ: $\min\limits_{\mathbb{R}} y(x)=y\left(\frac{8}{3}\right)\sqrt{10}.$

Пример 18. Найдите наименьшее значение функции

$$y=\sqrt{(x-1)^2+(x-6)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(x-2)^2}.$$

Решение. Введем векторы $\vec{a}=\{x-1;\,6-x\}$ и $\vec{b}=\{4-x;\,x-2\}$. Тогда $\vec{a}+\vec{b}=$ $=\{3;4\}$, $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$ и в соответствии с неравенством (7) имеем $|\vec{a}|+|\vec{b}|\geqslant5$. Поэтому $y\geqslant5$, причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, т. е. когда

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{4-x} = \dfrac{6-x}{x-2}, \\ \dfrac{x-1}{4-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2 = x^2-10x+24, \\ \dfrac{x-1}{4-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{22}{7}.$$

Ответ: $\min\limits_{\mathbb{R}} y(x) = y\left(\frac{22}{7}\right) = 5.$

Пример 19. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{4^x+1} + \sqrt{(2^x-12)^2+4}.$$

Решение. Введем векторы $\vec{a} = \{2^x; 1\}$ и $\vec{b} = \{12-2^x; 2\}$. Тогда $(\vec{a}+\vec{b}) = \{12; 3\}$, $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{153}$ и в соответствии с неравенством (7) имеем $|\vec{a}|+|\vec{b}| \geqslant \sqrt{153}$. Поэтому $y(x) \geqslant \sqrt{153} = 3\sqrt{17}$, причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, т. е. когда

$$\frac{12-2^x}{2^x} = \frac{2}{1} \Leftrightarrow 12-2^x = 2\cdot 2^x \Leftrightarrow 2^x = 4 \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ: $\min\limits_{\mathbb{R}} y(x) = y(2) = 3\sqrt{17}.$

Заметим, что, вводя векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, следует выбирать их координаты таким образом, чтобы координаты вектора $\vec{a}+\vec{b}$ не зависели от переменной x. Кроме того, если квадраты каких-то одноименных координат векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ являются числами (как в примерах 17 и 19), то знаки этих чисел должны выбираться одинаковыми, для того чтобы было выполнено условие сонаправленности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Если же любая из координат векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ зависит от x (как в примере 18), то следует наложить ограничение на отношение двух одноименных координат: это отношение должно быть положительным.

Неравенство $\vec{a}\cdot\vec{b} \leqslant |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

Неравенство

$$\vec{a}\cdot\vec{b} \leqslant |\vec{a}|\cdot|\vec{b}| \tag{8}$$

легко следует из определения скалярного произведения векторов:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) \leqslant |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|.$$

Знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 1$, т. е. угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 0 и, следовательно, $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Неравенство (8), как правило, применяется для вычисления наибольшего значения функции и используется при этом в координатной форме.

Пример 20. Найдите наибольшее значение функции $y=2x+\sqrt{1-4x^2}$.

Решение. Область определения функции: $D(y)=\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$. Введем векторы $\vec{a}=\{2x;\sqrt{1-4x^2}\}$ и $\vec{b}=\{1;1\}$. Тогда

$$|\vec{a}|=\sqrt{4x^2+1-4x^2}=1,\quad |\vec{b}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2},\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=2x+\sqrt{1-4x^2}.$$

В силу неравенства (8) имеем $\vec{a}\cdot\vec{b}\leqslant 1\cdot\sqrt{2}$, поэтому $y(x)\leqslant\sqrt{2}$, причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, т. е. когда

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-4x^2}}{1}=\dfrac{2x}{1},\\ \dfrac{2x}{1}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-4x^2=4x^2,\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Заметим, что $\frac{1}{2\sqrt{2}}\in D(y)$.

Ответ: $\max\limits_{\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]} y(x)=y\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}$.

Пример 21. Найдите наибольшее значение функции

$$y=x\left(\sqrt{1-9x^2}+3\sqrt{4-x^2}\right).$$

Решение. Имеем $y=x\sqrt{1-9x^2}+3x\sqrt{4-x^2}$, $D(y)=\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]$. Введем векторы $\vec{a}=\{x;\sqrt{4-x^2}\}$ и $\vec{b}=\{\sqrt{1-9x^2};3x\}$. Тогда

$$y=\vec{a}\cdot\vec{b},\quad |\vec{a}|=\sqrt{x^2+4-x^2}=2,\quad |\vec{b}|=\sqrt{1-9x^2+9x^2}=1$$

и в силу неравенства (8) имеем $y(x)\leqslant 2\cdot 1=2$, причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, т. е. когда

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-9x^2}}{x}=\dfrac{3x}{\sqrt{4-x^2}},\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(1-9x^2)(4-x^2)=9x^4,\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=\dfrac{4}{37},\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{2}{\sqrt{37}}.$$

Заметим, что $\frac{2}{\sqrt{37}}<\frac{2}{\sqrt{36}}=\frac{1}{3}$, поэтому $\frac{2}{\sqrt{37}}\in D(y)$.

Ответ: $\max\limits_{\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]} y(x)=y\left(\frac{2}{\sqrt{37}}\right)=2$.

Пример 22. Найдите наибольшее значение функции

$$y=\frac{|2x-1|\sqrt{2x-1}+|x-1|\sqrt{4x-1}}{x^2}.$$

Решение. Область определения функции: $D(y) = \left[\frac{1}{2}; \infty\right)$. Введем векторы $\vec{a} = \{|2x-1|; \sqrt{4x-1}\}$ и $\vec{b} = \{\sqrt{2x-1}; |x-1|\}$. Тогда

$$|\vec{a}| = \sqrt{|2x-1|^2 + (\sqrt{4x-1})^2} = \sqrt{4x^2} = 2x,$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(\sqrt{2x-1})^2 + |x-1|^2} = \sqrt{x^2} = x \quad \left(\text{так как } x \geqslant \frac{1}{2}\right).$$

В силу неравенства (8) имеем $\vec{a} \cdot \vec{b} \leqslant |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 2x^2$, поэтому $y(x) \leqslant \frac{2x^2}{x^2} = 2$, причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, т. е.

$$\begin{cases} \dfrac{|2x-1|}{\sqrt{2x-1}} = 2, \\ \dfrac{\sqrt{4x-1}}{|x-1|} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(2x-1)^2}{2x-1} = 4, \\ \dfrac{4x-1}{(x-1)^2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}.$$

Заметим, что при $x = \frac{1}{2}$ векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ также являются сонаправленными.

Ответ: $\max\limits_{\left[\frac{1}{2};\infty\right)} y(x) = y\left(\frac{1}{2}\right) = y\left(\frac{5}{2}\right) = 2.$

При использовании неравенства (8) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ следует вводить таким образом, чтобы либо $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ не зависели от переменной x (пример 20), либо отношение модулей этих векторов было величиной постоянной. Кроме того, следует отметить, что если в условии (или в условиях) сонаправленности приходится выполнять деления на выражение, содержащее неизвестную, нужно проверить, не являются ли векторы сонаправленными и в том случае, когда это выражение обращается в нуль. Если этого не сделать, то можно потерять решение (см. пример 22).

Монотонные функции

При вычислении наибольших и наименьших значений монотонных функций во многих случаях можно обойтись без применения производной, основываясь, по существу, лишь на определении возрастающей (убывающей) функции.

Пример 23. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{2x-3} + \sqrt{3x-2}.$$

Решение. Область определения функции: $D(y)=\left[\frac{3}{2};\,\infty\right)$. Функция $y=\sqrt{2x-3}+\sqrt{3x-2}$ является возрастающей на $D(y)$ как сумма двух возрастающих функций. Поэтому $y(x)\geqslant y\left(\frac{3}{2}\right)=\sqrt{\frac{5}{2}}$.

Ответ: $\min y(x)=y\left(\frac{3}{2}\right)=\sqrt{\frac{5}{2}}$.

Пример 24. Найдите наибольшее значение функции

$$y=\log_2(1-x-x^2).$$

Решение. Имеем $1-x-x^2=\frac{5}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{5}{4}$. Функция $\log_2 t$ является возрастающей на своей области определения, поэтому $\log_2(1-x-x^2)\leqslant\log_2\frac{5}{4}$ на $D(y)$, причем знак равенства достигается при $x=-\frac{1}{2}$.

Ответ: $\max y(x)=y\left(-\frac{1}{2}\right)=\log_2\frac{5}{4}$.

Пример 25. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}.$$

Решение. Имеем $-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}\cos x\leqslant\frac{\pi}{2}$, а на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\,\frac{\pi}{2}\right]$ функция $\sin t$ является возрастающей, поэтому

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\leqslant\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)\leqslant\sin\frac{\pi}{2},$$

т. е. $-1\leqslant\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)\leqslant 1$. Функция $\left(\frac{1}{2}\right)^z$ является убывающей на $\mathbb{R}$, следовательно,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2.$$

При этом $y(x)=\frac{1}{2}$, если $\cos x=1\iff x=2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; $y(x)=2$, если $\cos x=-1\iff x=\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $\max y(x)=2$ достигается при $x=\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $\min y(x)=\frac{1}{2}$ достигается при $x=2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Пример 26. Найдите наибольшее значение функции

$$y=\sqrt{5-2x}-\sqrt{1-2x}.$$

Решение. Имеем

$$y(x) = \left(\sqrt{5-2x} - \sqrt{1-2x}\right) \cdot \frac{\sqrt{5-2x}+\sqrt{1-2x}}{\sqrt{5-2x}+\sqrt{1-2x}} = \frac{(5-2x)-(1-2x)}{\sqrt{5-2x}+\sqrt{1-2x}} = \frac{4}{\sqrt{5-2x}+\sqrt{1-2x}}.$$

Имеем $D(y) = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$ и функция $f(x) = \sqrt{5-2x} + \sqrt{1-2x}$ является убывающей на $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$ (как сумма двух убывающих функций), следовательно, $f(x) \geqslant f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ при $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$. Поэтому функция $y(x) = \frac{1}{f(x)}$ является возрастающей на $D(y)$ и $y(x) \leqslant \frac{4}{f\left(\frac{1}{2}\right)} = 2$ при $x \in D(y)$.

Ответ: $\max y(x) = y\left(\frac{1}{2}\right) = 2$.

Исследование множества значений функции

В некоторых случаях найти наибольшее (наименьшее) значение функции $y = f(x)$ удается, исследовав при помощи элементарных приемов множество значений функции. В таких случаях зависимость $y = f(x)$ рассматривают как уравнение относительно переменной x с параметром y и находят наибольшее (наименьшее) значение y, при котором это уравнение имеет решения.

Пример 27. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \frac{4x-1}{x^2-2x+2}. \qquad (9)$$

Решение. Область определения функции: $D(y) = \mathbb{R}$. Рассмотрим уравнение (9) как уравнение относительно переменной x с параметром y, переписав его в виде

$$yx^2 - 2(y+2)x + 2y + 1 = 0. \qquad (10)$$

Если $y = 0$, то уравнение (10) становится линейным. При этом $x = \frac{1}{4}$. Пусть теперь $y \neq 0$. Уравнение (10) имеет решения в том и только в том случае, если его дискриминант D неотрицателен. Найдем $\frac{D}{4} = (y+2)^2 - y(2y+1) = -y^2 + 3y + 4 \geqslant 0$, т. е. $y^2 - 3y - 4 \leqslant 0 \iff -1 \leqslant y \leqslant 4$. Таким образом, $\min y = -1$, $\max y = 4$. При этом $D = 0$ и $x = \frac{y+2}{y}$. Если $y = -1$, то $x = -1$; если $y = 4$, то $x = \frac{3}{2}$.

Ответ: $\min y(x) = y(-1) = -1$; $\max y(x) = y\left(\frac{3}{2}\right) = 4$.

Пример 28. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \frac{x^2+1}{2x^2+x+1}. \qquad (11)$$

Решение. Область определения функции: $D(y) = \mathbb{R}$. Перепишем уравнение (11) в виде

$$(2y-1)x^2+yx+y-1=0. \tag{12}$$

При $y=\frac{1}{2}$ уравнение (12) становится линейным. В этом случае $x=1$. Пусть $y\neq\frac{1}{2}$. Уравнение (12) имеет решения в том и только том случае, если $0\leqslant D$, где D — дискриминант этого уравнения, равный $y^2-4(2y-1)(y-1)=-7y^2+12y-4$. Имеем $D\geqslant 0$, если

$$7y^2-12y+4\leqslant 0 \iff \frac{6-2\sqrt{2}}{7}\leqslant y\leqslant\frac{6+2\sqrt{2}}{7}.$$

Очевидно, что $\frac{6+2\sqrt{2}}{7}>\frac{1}{2}$. Поэтому $\max y=\frac{6+2\sqrt{2}}{7}$. При этом $D=0$ и $x=-\frac{y}{2(2y-1)}$, т. е.

$$x=-\frac{3+\sqrt{2}}{5+4\sqrt{2}}=-\frac{(3+\sqrt{2})(5-4\sqrt{2})}{(5+4\sqrt{2})(5-4\sqrt{2})}=1-\sqrt{2}.$$

Ответ: $\max y(x)=y(1-\sqrt{2})=\frac{6+2\sqrt{2}}{7}$.

Отметим, что использовать данный метод целесообразно в том случае, если полученное уравнение с параметром y имеет достаточно простой вид (например, является квадратным относительно x).

Комбинирование приемов

В заключение рассмотрим ряд задач, решение которых требует применения нескольких из описанных выше приемов. К таким задачам относятся, в частности, задачи на вычисление наибольших и наименьших значений выражений (функций), зависящих более чем от одной переменной.

Пример 29. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=5^{\frac{4x-9}{x^2-6x+10}}$.

Решение. Пусть $t=\frac{4x-9}{x^2-6x+10}$. Найдем множество значений функции t. Для этого рассмотрим уравнение

$$tx^2-2(3t+2)x+10t+9=0. \tag{13}$$

При $t=0$ уравнение (13) становится линейным. При этом $x=\frac{9}{4}$. Пусть $t\neq 0$. Тогда уравнение (13) имеет решения в том и только том случае, если $\frac{D}{4}\geqslant 0$, где D — дискриминант этого уравнения. Найдем

$$\frac{D}{4}=(3t+2)^2-t(10t+9)=-t^2+3t+4.$$

Поэтому $\frac{D}{4}\geqslant 0 \iff t^2-3t-4\leqslant 0 \iff -1\leqslant t\leqslant 4$. Таким образом, $\max t(x)=4$, $\min t(x)=-1$. При этом $\frac{D}{4}=0$ и $x=\frac{3t+2}{t}$. Если $t=4$, то $x=\frac{7}{2}$; если $t=-1$, то $x=1$.

Далее, функция 5^t — возрастающая, поэтому $5^{-1} \leqslant 5^t \leqslant 5^4$, т. е.

$$\min_{\mathbb{R}} y(x) = y(1) = \frac{1}{5}, \quad \max_{\mathbb{R}} y(x) = y\left(\frac{7}{2}\right) = 625.$$

Ответ: $\min\limits_{\mathbb{R}} y(x) = y(1) = \frac{1}{5}$, $\max\limits_{\mathbb{R}} y(x) = y\left(\frac{7}{2}\right) = 625$.

Пример 30. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \log_{0,5}\left(\frac{\sqrt{4x^4 - 3x^2 + 9} - \sqrt{4x^4 - 8x^2 + 9}}{x}\right)$$

на интервале $(0; \infty)$.

Решение. При $x > 0$ выражение, стоящее под знаком логарифма, положительно, что следует из очевидного неравенства

$$\sqrt{4x^4 - 3x^2 + 9} > \sqrt{4x^4 - 8x^2 + 9},$$

равносильного неравенству $5x^2 > 0$. Пусть

$$t = \frac{\sqrt{4x^4-3x^2+9} - \sqrt{4x^4-8x^2+9}}{x} =$$

$$= \frac{5x}{\sqrt{4x^4-3x^2+9} + \sqrt{4x^4-8x^2+9}} = \frac{5}{\sqrt{4x^2+\frac{9}{x^2}-3} + \sqrt{4x^2+\frac{9}{x^2}-8}}.$$

В силу неравенства (3) имеем

$$4x^2 + \frac{9}{x^2} \geqslant 2\sqrt{4x^2 \cdot \frac{9}{x^2}} = 12,$$

причем знак равенства достигается, лишь если $4x^2 = \frac{9}{x^2}$ и $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Таким образом,

$$\sqrt{4x^2 + \frac{9}{x^2} - 3} + \sqrt{4x^2 + \frac{9}{x^2} - 8} \geqslant \sqrt{12-3} + \sqrt{12-8} = 5.$$

Отсюда $t \leqslant 1$. Функция $\log_{0,5} t$ является убывающей, поэтому $\log_{0,5} t \geqslant \log_{0,5} 1 = 0$.

Ответ: $\min\limits_{(0;\infty)} y(x) = y\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 0$.

Пример 31. Найдите наибольшее значение выражения

$$z = \sin^3 x + \cos^3 y + \cos^7 x + \sin^7 y.$$

Решение. Имеем $\sin^3 x \leqslant \sin^2 x$, $\cos^3 y \leqslant \cos^2 y$, $\cos^7 x \leqslant \cos^2 x$, $\sin^7 y \leqslant \sin^2 y$, поэтому $z \leqslant \sin^2 x + \cos^2 y + \cos^2 x + \sin^2 y = 2$, причем знак равенства достигается, лишь если

$$\begin{cases} \sin^3 x = \sin^2 x, \\ \cos^7 x = \cos^2 x, \\ \sin^7 y = \sin^2 x, \\ \cos^3 y = \cos^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \sin x = 1, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \cos x = 1, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \sin y = 0, \\ \sin y = 1, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \cos y = 0, \\ \cos y = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos x = 0, \end{cases} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin y = 0, \\ \cos y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} \sin y = 1, \\ \cos y = 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{ll} x = 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z}, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{ll} y = 2\pi l, & l \in \mathbb{Z}, \\ y = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, & m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right. \end{cases}$$

(Всего 4 серии пар решений.)

Ответ: $\max z(x, y) = 2$.

Пример 32. Найдите наименьшее значение выражения

$$z = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-y)^2 + y^2}.$$

Решение. Введем векторы $\vec{a} = \{x-1; y-1\}$ и $\vec{b} = \{y-x; -y\}$. Тогда

$$|\vec{a}| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{(x-y)^2 + y^2},$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \{y-1; -1\}, \quad |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(y-1)^2 + 1}.$$

В силу неравенства (7) имеем $|\vec{a}| + |\vec{b}| \geqslant |\vec{a} + \vec{b}|$, причем знак равенства достигается, лишь если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Таким образом, $z \geqslant \sqrt{(y-1)^2 + 1} \geqslant 1$, причем $z = 1$, если $y = 1$ и $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, следовательно, $x = 1$.

Ответ: $\min z(x; y) = z(1; 1) = 1$.

Пример 33. Найдите наименьшее значение выражения

$$z = |x + 2y| + \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}.$$

Решение. Введем векторы $\vec{a} = \{x+2y; 0\}$, $\vec{b} = \{3-x; y-4\}$. Тогда

$$|\vec{a}| = |x + 2y|, \quad |\vec{b}| = \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2},$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \{2y + 3; y - 4\},$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(2y+3)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{5y^2 + 4y + 25}.$$

В силу неравенства (7) имеем $|\vec{a}| + |\vec{b}| \geqslant |\vec{a} + \vec{b}|$, причем знак равенства достигается, лишь если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Таким образом, $z \geqslant \sqrt{5y^2 + 4y + 25}$. Квадратный трехчлен

$5y^2+4y+25$ положителен при любом y (дискриминант меньше нуля и коэффициент при y^2 положителен) и достигает наименьшего значения при $y=\frac{-4}{2\cdot 5}=-\frac{2}{5}$. Это наименьшее значение равно, как легко подсчитать, $\frac{121}{5}$. Поэтому $z\geqslant\sqrt{\frac{121}{5}}$, причем знак равенства достигается, лишь если $y=-\frac{2}{5}$ и $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, следовательно, $x=\frac{4}{5}$.

Ответ: $\min z(x;y)=z\left(\frac{4}{5};-\frac{2}{5}\right)=\frac{11}{\sqrt{5}}$.

Пример 34. Найдите наибольшее значение выражения

$$z=y\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{3+2y-2y^2}.$$

Решение. Введем векторы $\vec{a}=\{y;\ \sqrt{3+2y-2y^2}\}$ и $\vec{b}=\{\sqrt{1-x^2};\ x\}$. Тогда

$$z=\vec{a}\cdot\vec{b},\quad |\vec{a}|=\sqrt{y^2+3+2y-2y^2}=\sqrt{4-(1-y)^2},\quad |\vec{b}|=\sqrt{1-x^2+x^2}=1.$$

В силу неравенства (8) имеем $\vec{a}\cdot\vec{b}\leqslant|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$, причем знак равенства достигается, лишь если $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$. Таким образом,

$$z\leqslant\sqrt{4-(y-1)^2}\leqslant\sqrt{4}=2,$$

причем знак равенства достигается, лишь если $y=1$ и $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, следовательно,

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{1}=\frac{x}{\sqrt{3}}\iff\begin{cases}x\geqslant 0,\\ 3-3x^2=x^2\end{cases}\iff x=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\max z(x;y)=z\left(\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)=2$.

Пример 35. Найдите наибольшее значение выражения

$$z=\sin x-2\cos y+\sin(x+y).$$

Решение. Имеем

$$z=\sin x-2\cos y+\sin x\cos y+\cos x\sin y=\sin x(1+\cos y)+\cos x\sin y-2\cos y.$$

В силу неравенства (6) получаем

$$\sin x(1+\cos y)+\cos x\sin y\leqslant\sqrt{(1+\cos y)^2+\sin^2 y},$$

т. е.

$$\sin x(1+\cos y)+\cos x\sin y\leqslant\sqrt{2+2\cos y}. \tag{14}$$

Поэтому $z\leqslant\sqrt{2+2\cos y}-2\cos y$. Пусть теперь $t=\sqrt{2+2\cos y}$, $0\leqslant t\leqslant 2$. Тогда $2\cos y=t^2-2$. Рассмотрим квадратный трехчлен $f(t)=t-t^2+2$ на отрезке $[0;2]$. Ветви параболы, являющейся графиком этого квадратного трехчлена, направлены вниз и абсцисса t_0 вершины, равная $\frac{1}{2}$, принадлежит отрезку [0; 2], следовательно,

$$\max_{[0;2]} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}.$$

Поэтому $z \leqslant \frac{9}{4}$, причем знак равенства достигается в том и только том случае, если одновременно $\sqrt{2+2\cos y} = \frac{1}{2}$ и неравенство (14) обращается в равенство. Отсюда

$$\begin{cases} \sqrt{2+2\cos y} = \frac{1}{2}, \\ \sin x(1+\cos y) + \cos x \sin y = \sqrt{2+2\cos y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos y = -\frac{7}{8}, \\ \left[\begin{array}{l} \sin x \cdot \frac{1}{8} - \cos x \cdot \frac{\sqrt{15}}{8} = \frac{1}{2}, \\ \sin x \cdot \frac{1}{8} + \cos x \cdot \frac{\sqrt{15}}{8} = \frac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos y = -\frac{7}{8}, \\ \left[\begin{array}{l} \sin x\left(x - \arccos\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2}, \\ \sin x\left(x + \arccos\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = \arccos\frac{7}{8} - \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x = \arccos\frac{1}{8} + (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \\ \begin{cases} y = \pi - \arccos\frac{7}{8} + 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z}, \\ x = -\arccos\frac{1}{8} + (-1)^m\frac{\pi}{6} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\max z(x; y) = \frac{9}{4}$.

Рассмотренные примеры показывают, что довольно большое число задач на вычисление наибольших и наименьших значений функций можно решить, не прибегая к помощи производной, а в некоторых случаях только такой путь и приводит к успеху. Отметим, что порой подобные задачи являются частью более сложных задач (например, уравнений, в которых минимум левой части совпадает с максимумом правой, причем решение «стандартными» приемами не представляется возможным).

Такого рода уравнения, неравенства или системы уравнений вполне могут встретиться среди заданий C1, C2, C3 Единого государственного экзамена по математике, поэтому, решив приведенные ниже тренировочные работы 13—15, вы сможете более уверенно чувствовать себя на экзамене.

Ответы:

Тренировочная работа 19

Т19.1. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 2\cdot 9^x - 3^{x+1} + 1.$$

Т19.2. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{1}{\sqrt{4x-3} - \sqrt{4x-7}}.$$

Т19.3. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 7^{5x-2} + 9\cdot 7^{4-5x} - 41.$$

Т19.4. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{2x^2 - 4|x| + 11}{2|x| - 1} \quad \text{на отрезке } [1; 3].$$

Т19.5. Найдите наименьшее значение функции

$$y = |2x - 3x^2| + |2x + 9|.$$

Т19.6. Найдите наименьшее значение функции

$$y = |\log_5 x| + |\log_5 x - 3| + \log_7^4(26 - x).$$

Т19.7. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{x^2 - 2x + 2} + \sqrt{x^2 - 10x + 29}.$$

Т19.8. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{\log_{0,75}^2 x + 1} + \sqrt{(\log_{0,75} x - 3)^2 + 9}.$$

Т19.9. Найдите наименьшее значение выражения

$$z = \sqrt{(2x-1)^2 + (3y-1)^2} + \sqrt{(2x-3y)^2 + 9y^2}.$$

Т19.10. Найдите наименьшее значение выражения

$$z = |2x - 3y| + \sqrt{4x^2 + (y+1)^2}.$$

Т19.1

Т19.2

Т19.3

Т19.4

Т19.5

Т19.6

Т19.7

Т19.8

Т19.9

Т19.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Ответы:

T20.1

T20.2

T20.3

T20.4

T20.5

T20.6

T20.7

T20.8

T20.9

T20.10

Образец написания: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Тренировочная работа 20

T20.1. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \sqrt{2x^2 - 1} - 4x^2.$$

T20.2. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \sqrt{2\lg x - 1} - \lg x.$$

T20.3. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \sqrt{2x - 1} - \sqrt{2x - 5}.$$

T20.4. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \sqrt{\log_2 x \log_2 \frac{4}{x}} \quad \text{на отрезке } \left[\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right].$$

T20.5. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \sqrt{(1 - x^5)(x^5 - 32)}.$$

T20.6. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 8x^3 - x^6 \quad \text{на отрезке } [1; 7].$$

T20.7. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 0{,}8\cos x(3\sin x + 4\cos x) + 3\sin x.$$

T20.8. Найдите наибольшее значение функции

$$y = x\left(2\sqrt{16 - 9x^2} + 3\sqrt{9 - 4x^2}\right).$$

T20.9. Найдите наибольшее значение выражения

$$z = 2y\sqrt{-x^2 - 2x} + (x + 1)\sqrt{3 + 4y - 8y^2}.$$

T20.10. Найдите наибольшее значение выражения

$$z = 2\cos x - \cos y + \cos(x - y).$$

Ответы:

Тренировочная работа 21

T21.1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = \cos 2x - \sin x - 1.$$

T21.2. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = \frac{\sqrt{x^2+x-2} - \sqrt{x^2-x-2}}{x} \quad \text{на отрезке } [-3; -2].$$

T21.3. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = \sin x + 4\sqrt{1-\sin x} - 5.$$

T21.4. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = 2x + 3 + 6|x-1| - x^2 \quad \text{на отрезке } [-2; 2].$$

T21.5. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = 2^{\frac{4x-5}{x^2-4x+5}}.$$

T21.6. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = \sqrt[3]{\frac{4x+3}{x^2+1}}.$$

T21.7. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = 1 + \log_2(3\sqrt{2x-1} - x - 1) \quad \text{на отрезке } [1; 7].$$

T21.8. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{2\cos x + \cos 2x - \cos^2 x}.$$

T21.9. Найдите наименьшее и наибольшее значения выражения

$$z = 3(\sin x + \cos y) + 4(\cos x + \sin y).$$

T21.10. Найдите наименьшее и наибольшее значения выражения

$$z = \frac{x^2(y+1)^2}{(2x^2-2x+1)(2y^2+2y+1)}.$$

T21.1

T21.2

T21.3

T21.4

T21.5

T21.6

T21.7

T21.8

T21.9

T21.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Ответы:

Д1.1

Д1.2

Д1.3

Д1.4

Д1.5

Д1.6

Д1.7

Д1.8

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Диагностическая работа 1

Д1.1. Найдите точку минимума функции
$$y = 7 + 12x - x^3.$$

Д1.2. Найдите наибольшее значение функции
$$y = x^3 - 3x + 4$$
на отрезке $[-2; 0]$.

Д1.3. Найдите точку максимума функции
$$y = \frac{16}{x} + x + 3.$$

Д1.4. Найдите наименьшее значение функции
$$y = x + \frac{36}{x}$$
на отрезке $[1; 9]$.

Д1.5. Найдите точку минимума функции
$$y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x + 1.$$

Д1.6. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 3x - 2x^{\frac{3}{2}}$$
на отрезке $[0; 4]$.

Д1.7. Найдите точку максимума функции
$$y = (2x - 3)\cos x - 2\sin x + 5,$$
принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Д1.8. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 6\sin x - 9x + 5$$
на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Ответы:

Д1.9. Найдите точку минимума функции

$$y = (x-7)e^{x+7}.$$

Д1.10. Найдите наибольшее значение функции

$$y = (x-9)e^{10-x}$$

на отрезке $[-11; 11]$.

Д1.11. Найдите точку максимума функции

$$y = \ln x - 2x.$$

Д1.12. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 4x - 4\ln x + 5$$

на отрезке $[0,5; 5,5]$.

Д1.9

Д1.10

Д1.11

Д1.12

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Ответы:

Д2.1

Д2.2

Д2.3

Д2.4

Д2.5

Д2.6

Д2.7

Д2.8

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Диагностическая работа 2

Д2.1. Найдите точку максимума функции

$$y = 5 + 4x - \frac{x^3}{3}.$$

Д2.2. Найдите наибольшее значение функции

$$y = x^3 - 6x^2$$

на отрезке $[-3; 3]$.

Д2.3. Найдите точку минимума функции

$$y = \frac{49}{x} + x + 49.$$

Д2.4. Найдите наибольшее значение функции

$$y = x + \frac{4}{x} + 4$$

на отрезке $[-4; -1]$.

Д2.5. Найдите точку максимума функции

$$y = 5 + 18x - 4x^{\frac{3}{2}}.$$

Д2.6. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 6x - x\sqrt{x} + 1$$

на отрезке $[9; 25]$.

Д2.7. Найдите точку минимума функции

$$y = 5\sin x - 5(x-1)\cos x + 4,$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Д2.8. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 12\cos x + 6\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}\pi + 6$$

на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Д2.9. Найдите точку максимума функции

$$y = (x^2 - 17x + 17)e^{7-x}.$$

Д2.10. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 4 + (x-5)e^{6-x}$$

на отрезке [1; 8].

Д2.11. Найдите точку минимума функции

$$y = x - 7\ln x + 6.$$

Д2.12. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 5\ln x - 5x + 7$$

на отрезке [0,7; 1,7].

Ответы:

Д2.9

Д2.10

Д2.11

Д2.12

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

Д3.1

Д3.2

Д3.3

Д3.4

Д3.5

Д3.6

Д3.7

Д3.8

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Диагностическая работа 3

Д3.1. Найдите точку минимума функции

$$y = \frac{x^3}{3} - 9x - 7.$$

Д3.2. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 9x^2 - x^3$$

на отрезке $[1; 10]$.

Д3.3. Найдите точку максимума функции

$$y = \frac{9}{x} + x + 9.$$

Д3.4. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x + \frac{64}{x} + 8$$

на отрезке $[4; 16]$.

Д3.5. Найдите точку максимума функции

$$y = 2 + 5x - \frac{2}{3}x\sqrt{x}.$$

Д3.6. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x\sqrt{x} - 12x + 11$$

на отрезке $[36; 81]$.

Д3.7. Найдите точку минимума функции

$$y = 2\cos x + \sin x - x\cos x,$$

принадлежащую промежутку $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Д3.8. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 11x - 5\cos x + 2$$

на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

Д3.9. Найдите точку максимума функции

$$y = (x+8)e^{8-x}.$$

Д3.10. Найдите наименьшее значение функции

$$y = (x+4)e^{x+5}$$

на отрезке $[-9; 9]$.

Д3.11. Найдите точку минимума функции

$$y = 2x - 5\ln x + 3.$$

Д3.12. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \ln(x+3)^3 - 3x$$

на отрезке $[-2{,}5; 2{,}5]$.

Ответы:

Д3.9

Д3.10

Д3.11

Д3.12

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Ответы:

Д4.1

Д4.2

Д4.3

Д4.4

Д4.5

Д4.6

Д4.7

Д4.8

Д4.9

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Диагностическая работа 4

Д4.1. Найдите точку максимума функции

$$y = x^3 - 5x^2 + 7x - 5.$$

Д4.2. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^3 - 3x^2 + 2$$

на отрезке $[1; 4]$.

Д4.3. Найдите точку максимума функции

$$y = \frac{x^2 + 225}{x}.$$

Д4.4. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \frac{x^2 + 25}{x}$$

на отрезке $[-10; -1]$.

Д4.5. Найдите точку минимума функции

$$y = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - 3x + 5.$$

Д4.6. Найдите наибольшее значение функции

$$y = (27 - x)\sqrt{x}$$

на отрезке $[1; 16]$.

Д4.7. Найдите точку максимума функции

$$y = 3 - 4\sin x - (5 - 4x)\cos x,$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Д4.8. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 2\sin x + 7x - 11$$

на отрезке $[0; 3\pi]$.

Д4.9. Найдите точку минимума функции

$$y = (x + 5)e^{x-5}.$$

Ответы:

Д4.10. Найдите наибольшее значение функции

$$y = (8 - x)e^{x-7}$$

на отрезке [3; 10].

Д4.11. Найдите точку максимума функции

$$y = \ln(x+2) - x + 3.$$

Д4.12. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 2x - 2\ln(x+3) + 3$$

на отрезке [−2,5; 1].

Д4.10

Д4.11

Д4.12

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Ответы:

Д5.1

Д5.2

Д5.3

Д5.4

Д5.5

Д5.6

Д5.7

Д5.8

Д5.9

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Диагностическая работа 5

Д5.1. Найдите точку минимума функции
$$y = 7 + 12x - x^3.$$

Д5.2. Найдите наибольшее значение функции
$$y = x^3 - 3x + 4$$
на отрезке $[-2; 0]$.

Д5.3. Найдите точку максимума функции
$$y = \frac{16}{x} + x + 3.$$

Д5.4. Найдите наименьшее значение функции
$$y = x + \frac{36}{x}$$
на отрезке $[1; 9]$.

Д5.5. Найдите точку минимума функции
$$y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x + 1.$$

Д5.6. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 3x - 2x^{\frac{3}{2}}$$
на отрезке $[0; 4]$.

Д5.7. Найдите точку максимума функции
$$y = (2x - 3)\cos x - 2\sin x + 5,$$
принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Д5.8. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 6\sin x - 9x + 5$$
на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Д5.9. Найдите точку минимума функции
$$y = (x - 7)e^{x+7}.$$

Д5.10. Найдите наибольшее значение функции

$$y = (x-9)e^{10-x}$$

на отрезке $[-11; 11]$.

Д5.11. Найдите точку максимума функции

$$y = \ln x - 2x.$$

Д5.12. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 4x - 4\ln x + 5$$

на отрезке $[0{,}5; 5{,}5]$.

Ответы:

Д5.10

Д5.11

Д5.12

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы

Диагностическая работа

1. −4. **2.** −54. **3.** 5. **4.** −6. **5.** 4. **6.** −3. **7.** 0,5. **8.** 8. **9.** 19. **10.** −1. **11.** 5. **12.** 19.

Тренировочная работа 1 (Т1)

1. −4. **2.** 0. **3.** 14. **4.** −14. **5.** 15. **6.** 24. **7.** −2. **8.** −35. **9.** 162. **10.** 2.

Тренировочная работа 2 (Т2)

1. 1. **2.** 2. **3.** 2. **4.** −2. **5.** 3. **6.** −4. **7.** 2. **8.** −2. **9.** 4. **10.** −3.

Тренировочная работа 3 (Т3)

1. 1. **2.** 0. **3.** 5. **4.** 4. **5.** −29. **6.** 256. **7.** −32. **8.** 3. **9.** −4. **10.** 108.

Тренировочная работа 4 (Т4)

1. 48. **2.** −21. **3.** −11. **4.** −3. **5.** 80. **6.** −35. **7.** −4. **8.** −60. **9.** −80. **10.** 45.

Тренировочная работа 5 (Т5)

1. −4. **2.** 6. **3.** 8. **4.** 2. **5.** 2. **6.** −3. **7.** 1. **8.** −2. **9.** −3. **10.** −4.

Тренировочная работа 6 (Т6)

1. 8. **2.** −7. **3.** 6. **4.** −24. **5.** 30. **6.** −6. **7.** 10. **8.** −12. **9.** 27. **10.** −25.

Тренировочная работа 7 (Т7)

1. 3. **2.** 2. **3.** 2. **4.** 3. **5.** 35. **6.** 36. **7.** 10. **8.** 5. **9.** 0,9. **10.** 1,3.

Тренировочная работа 8 (Т8)

1. 9. **2.** 4. **3.** 1. **4.** 16. **5.** 3. **6.** 2. **7.** 4. **8.** 5. **9.** 1. **10.** 1.

Тренировочная работа 9 (Т9)

1. −16. **2.** −4. **3.** 81. **4.** 16. **5.** −16. **6.** 16. **7.** −48. **8.** 17. **9.** −103. **10.** 59.

Тренировочная работа 10 (Т10)

1. −7. **2.** −23. **3.** 16. **4.** 0. **5.** −39. **6.** −4. **7.** 8. **8.** 12. **9.** 14. **10.** 12.

Тренировочная работа 11 (Т11)

1. 3. **2.** 1,5. **3.** 1,2. **4.** 0,5. **5.** 2,5. **6.** 0,75. **7.** 0,25. **8.** 1,25. **9.** 0,4. **10.** 2,5.

Ответы

Тренировочная работа 12 (Т12)

1. 6. **2.** 34. **3.** 14. **4.** 7. **5.** -1. **6.** 14. **7.** -6. **8.** 8. **9.** -10. **10.** -18.

Тренировочная работа 13 (Т13)

1. 49. **2.** 0,01. **3.** 36. **4.** -81. **5.** 36. **6.** 2. **7.** -9. **8.** -3. **9.** 21. **10.** 45.

Тренировочная работа 14 (Т14)

1. 3. **2.** 0. **3.** 13. **4.** -1. **5.** 2. **6.** 4. **7.** 5. **8.** 7. **9.** 1. **10.** -3.

Тренировочная работа 15 (Т15)

1. 7. **2.** 14. **3.** 4. **4.** 4. **5.** -2. **6.** 10. **7.** 0. **8.** 4. **9.** -1. **10.** 2.

Тренировочная работа 16 (Т16)

1. 4. **2.** 5. **3.** 0,24. **4.** 0,9. **5.** 7. **6.** 15. **7.** 16. **8.** 0,25. **9.** 6. **10.** 60.

Тренировочная работа 17 (Т17)

1. 0,4. **2.** 9. **3.** 8. **4.** 5. **5.** 9,5. **6.** 3. **7.** 11,5. **8.** $-4{,}8$. **9.** 4. **10.** 3.

Тренировочная работа 18 (Т18)

1. -20. **2.** 13. **3.** 19. **4.** 6. **5.** 2. **6.** 12. **7.** -1. **8.** 10. **9.** -7. **10.** 9.

Тренировочная работа 19 (Т19)

1. $-\frac{1}{8}$. **2.** 0,5. **3.** 1. **4.** 3,4. **5.** 9. **6.** 3. **7.** 5. **8.** 5. **9.** 1. **10.** $0{,}3\sqrt{10}$.

Тренировочная работа 20 (Т20)

1. $-\frac{15}{8}$. **2.** 0. **3.** 2. **4.** 1. **5.** $\frac{31}{2}$. **6.** 16. **7.** 5. **8.** 12. **9.** 2. **10.** $\frac{9}{4}$.

Тренировочная работа 21 (Т21)

1. $\max\limits_{\mathbb{R}} y(x) = \frac{1}{8}$; $\min\limits_{\mathbb{R}} y(x) = -3$. **2.** $\max\limits_{[-3;-2]} y(x) = 1$; $\min\limits_{[-3;-2]} y(x) = \frac{2}{2+\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}-2}{3}$. **3.** $\max\limits_{\mathbb{R}} y(x) = 4\sqrt{2}-6$; $\min\limits_{\mathbb{R}} y(x) = -4$. **4.** $\max\limits_{[-2;2]} y(x) = 13$; $\min\limits_{[-2;2]} y(x) = 4$. **5.** $\max\limits_{\mathbb{R}} y(x) = 16$; $\min\limits_{\mathbb{R}} y(x) = 0{,}5$. **6.** $\max\limits_{\mathbb{R}} y(x) = \sqrt[3]{4}$; $\min\limits_{\mathbb{R}} y(x) = -1$. **7.** $\max\limits_{[1;7]} y(x) = 1 + \log_2 3$; $\min\limits_{[1;7]} y(x) = 1$. **8.** $\max\limits_{\mathbb{R}} y(x) = 9$; $\min\limits_{\mathbb{R}} y(x) = \frac{1}{9}$. **9.** $\max z(x; y) = 10$; $\min z(x; y) = -10$. **10.** $\max z(x; y) = 1$; $\min z(x; y) = 0$.

Диагностические работы

Диагностическая работа 1 (Д1)

1. −2. **2.** 6. **3.** −4. **4.** 12. **5.** 4. **6.** 1. **7.** 1,5. **8.** 5. **9.** 6. **10.** 1. **11.** 0,5. **12.** 9.

Диагностическая работа 2 (Д2)

1. 2. **2.** 0. **3.** 7. **4.** 0. **5.** 9. **6.** 33. **7.** 1. **8.** 12. **9.** 17. **10.** 5. **11.** 7. **12.** 2.

Диагностическая работа 3 (Д3)

1. 3. **2.** 108. **3.** −3. **4.** 24. **5.** 25. **6.** −245. **7.** 2. **8.** −3. **9.** −7. **10.** −1. **11.** 2,5. **12.** 6.

Диагностическая работа 4 (Д4)

1. 1. **2.** −2. **3.** −15. **4.** −10. **5.** 36. **6.** 54. **7.** 1,25. **8.** −11. **9.** −6. **10.** 1. **11.** −1. **12.** −1.

Диагностическая работа 5 (Д5)

1. −2. **2.** 6. **3.** −4. **4.** 12. **5.** 4. **6.** 1. **7.** 1,5. **8.** 5. **9.** 6. **10.** 1. **11.** 0,5. **12.** 9.

Содержание