МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2011
(типовые задания С4)

Планиметрические задачи с неоднозначностью в условии (многовариантные задачи)

Корянов А.Г., г. Брянск
akoryanov@mail.ru
Прокофьев А.А., г. Москва
aaprokof@yandex.ru

СОДЕРЖАНИЕ

Задачи С4 из вариантов ЕГЭ 2010 и тренировочных работ для подготовки к ЕГЭ 2010 и 2011 имеют характерную особенность. В отличие от практики единого экзамена прошлых лет и подавляющего большинства задач школьного учебника эти задачи содержат в условии некоторую неопределенность, которая позволяет трактовать условие неоднозначно. В результате удается построить несколько чертежей, удовлетворяющих условию задачи. Поэтому подобные задачи называют многовариантными. Перебор вариантов является частью решения задач такого типа. Отметим, что перебор может сократиться за счет дополнительной информации, указанной в условии задачи.

1. Взаимное расположение линейных фигур

Геометрической фигурой называют любую совокупность точек, линий, поверхностей. *Линейной* будем считать фигуру, представляющую собой точку, отрезок, луч, прямую. При решении задач условие может трактоваться неоднозначно, если для рассматриваемых фигур не указано их взаимное расположение.

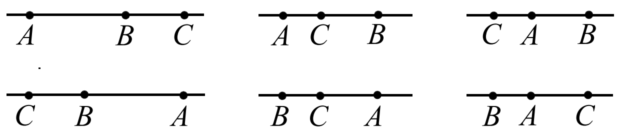
взаимное расположение различных точек на прямой

Пример 1. *На прямой взяты точки A, B и C так, что расстояние между точками A и B равно* 5, *а между B и C равно* 3. *Найдите расстояние между точками A и C.*

Решение. Неоднозначность в данной задаче состоит в том, что на прямой не указано взаимное расположение точек A,

B и C относительно друг друга. Можно записать шесть различных вариантов расположение этих точек: A, B, C или C, B, A; A, C, B или B, C, A; C, A, B или B, A, C.

Если точка B лежит между A и C (см. рис. 1*а*), то $AC = AB + BC = 5 + 3 = 8$ или $CA = CB + BA = 3 + 5 = 8$, т.е. расстояние между точками A и C равно 8.



а *б* *в*

Рис. 1

Если точка C лежит между A и B (см. рис. 1*б*), то $AB = AC + CB$ и тогда $AC = 5 - 3 = 2$ или $BA = BC + CA$ и тогда $CA = 5 - 3 = 2$, т.е. расстояние между точками A и C равно 2.

Случай, когда точка A лежит между C и B (см. рис. 1*в*), невозможен, так как тогда по условию $CB < AB$.

***Ответ*:** 8 или 2.

В следующем примере наличие дополнительной информации о расположении точек на прямой (левее, правее, деление отрезка в заданном отношении) сокращает перебор случаев.

Пример 2. *На прямой взяты точки* A, B *и* C *так, что точка* B *расположена правее точки* A *и* $AB : BC = 3$. *Найдите отношение* $AC : AB$.

Решение. Рассмотрим три случая.

1. Если точка C расположена правее точки B, то $AB = 3BC$, $AC = AB + BC = 4BC$ и $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{4BC}{3BC} = \dfrac{4}{3}$.

2. Если точка C лежит между точками A и B, то $AB = 3BC$, $AC = AB - CB = 2BC$ и тогда $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{2BC}{3BC} = \dfrac{2}{3}$.

3. Случай, когда точка C расположена левее точки A, невозможен, так как тогда должно выполняться равенство $CB = CA + AB$, но $AB > CB$.

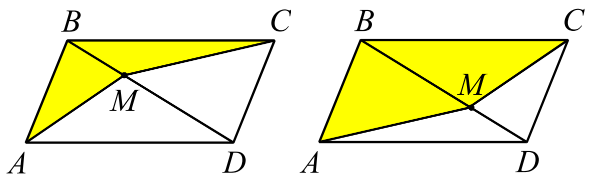
***Ответ*:** $\dfrac{4}{3}$ или $\dfrac{2}{3}$.

Как правило, в экзаменационных задачах точки и отрезки «привязаны» к более сложной конфигурации и от их расположения зависит перебор вариантов для чертежа.

Пример 3. *Дан параллелограмм ABCD. Точка M лежит на диагонали BD и делит ее в отношении* $1:2$. *Найдите площадь параллелограмма ABCD, если площадь четырехугольника ABCM равна* 60.

Решение. Поскольку в условии задачи не указано относительно какого из концов отрезка BD он делится точкой M в отношении $1:2$, то необходимо рассмотреть два случая (см. рис. 2) расположения точки M такие, что $BM : MD = 1:2$ (см. рис. 2*а*) и $BM : MD = 2:1$ (см. рис. 2*б*).

Так как диагональ параллелограмма делит его на два равновеликих треугольника, то $S_{ABD} = S_{BCD} = \dfrac{1}{2} S_{ABCD}$.



а *б*

Рис. 2

1. Если $BM : MD = 1:2$, то $BM = \dfrac{1}{3} BD$ и $S_{ABM} = \dfrac{1}{3} S_{ABD} = \dfrac{1}{6} S_{ABCD}$ (треугольники ABM и ABD имеют общую высоту).

Аналогично

$$S_{BCM} = \frac{1}{3} S_{BCD} = \frac{1}{6} S_{ABCD}.$$

Тогда

$$S_{ABCM} = S_{ABM} + S_{BCM} = \frac{1}{3} S_{ABCD}.$$

Отсюда $S_{ABCD} = 3 \cdot S_{ABCM} = 3 \cdot 60 = 180$.

2. Если $BM : MD = 2:1$, то, проводя аналогичные рассуждения, получим

$$S_{ABCM} = \frac{2}{3} S_{ABCD}.$$

Отсюда $S_{ABCD} = \dfrac{3}{2} \cdot S_{ABCM} = \dfrac{3}{2} \cdot 60 = 90$.

***Ответ*:** 180 или 90.

Пример 4. *На стороне BC параллелограмма $ABCD$ выбрана точка E, делящая эту сторону прямой в отношении $2:3$. Отрезок DE пересекает диагональ AC в точке F. Какую часть площади параллелограмма $ABCD$ составляет площадь треугольника AFD?*

Решение. Поскольку в условии задачи не указано относительно какого из концов отрезка BC он делится точкой E в отношении $2:3$, то возможны два случая (на рис. 3 точки E и E_1 такие, что $BE:EC=2:3$ и $E_1C:BE_1=2:3$).

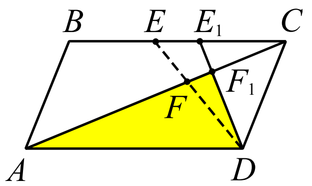


Рис. 3

1. Если $BE:EC=2:3$, то $BE=\frac{2}{3}EC$ и $BC=EC+\frac{2}{3}EC=\frac{5}{3}EC$. Треугольники ECF и AFD подобны по трем углам и $\frac{AF}{CF}=\frac{AD}{EC}=\frac{BC}{EC}=\frac{5}{3}$. Тогда $FC=\frac{3}{5}AF$ и $AC=\frac{8}{5}AF$.

Диагональ параллелограмма делит его на два равновеликих треугольника, тогда $S_{ACD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Треугольники AFD и ACD имеют общую вершину D и их основания лежат на одно прямой. Следовательно, их площади относятся как основания, т.е. $\frac{S_{AFD}}{S_{ACD}}=\frac{AF}{AC}=\frac{5}{8}$. Отсюда

$$S_{AFD}=\frac{5}{8}S_{ACD}=\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{2}S_{ABCD}=\frac{5}{16}S_{ABCD}.$$

2. В случае $E_1C:BE_1=2:3$, решая аналогичным образом, получим

$$S_{AF_1D}=\frac{5}{14}S_{ABCD}.$$

Ответ: $\frac{5}{14}$ или $\frac{5}{16}$.

Пример 5. (ЕГЭ, 2010). *В треугольнике ABC $AB=12$, $BC=5$, $CA=10$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD:DC=4:9$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.*

● *В треугольнике со сторонами a, b, c расстояние от вершины A до точек касания вписанной окружности сторон, содержащих эту вершину, равно* $\frac{b+c-a}{2}$.

Решение. Пусть $AD=d$, $BD=x$, $DC=y$. Тогда для окружности вписанной в треугольник ADC имеем

$$DE=\frac{d+y-10}{2},$$

а окружности вписанной в треугольник ADB

$$DF=\frac{d+x-12}{2}.$$

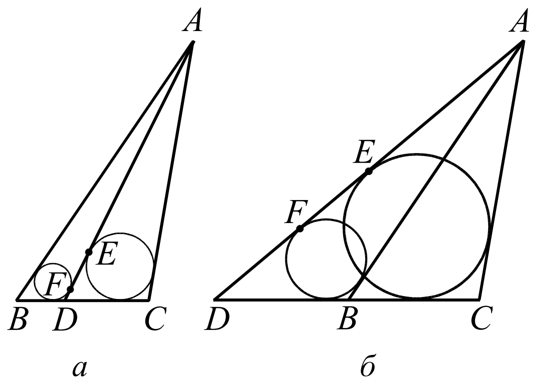


Рис. 4

Поскольку в условии сказано, что точка D лежит на прямой BC, то существует два ее положения, при которых будет выполняться условие $BD:DC=4:9$. Соответственно, существует два рисунка, удовлетворяющих условию задачи.

1. Пусть точка D лежит на отрезке BC (рис. 4*а*). Тогда $x=\frac{20}{13}$, $y=\frac{45}{13}$. Значит,

$$EF=|DE-DF|=$$

$$=\left|\frac{d+y-10}{2}-\frac{d+x-12}{2}\right|=\frac{51}{26}.$$

2. Пусть точка D лежит вне отрезка BC (рис. 4*б*). Тогда $x=4$, $y=x+BC==9$. Значит,

$$EF=|DE-DF|=\frac{7}{2}.$$

Случай расположения точки D правее точки C невозможен.

Замечание. Так как в решении не исследовано расположение точек E и F на отрезке AD, то при вычислении длины отрезка EF использован знак модуля.

Ответ: $\frac{7}{2}$ и $\frac{51}{26}$.

взаимное расположение точки и отрезка, лежащих на одной прямой

Пример 6. *В прямоугольнике $ABCD$ $AB=2$, $BC=\sqrt{3}$. Точка E на прямой AB выбрана так, что $\angle AED=\angle DEC$. Найдите AE.*

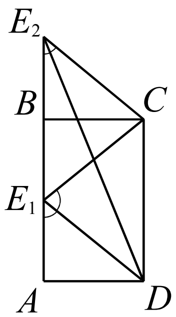


Рис. 5

Решение. По свойству параллельных прямых $\angle AED=\angle EDC$. Следовательно, треугольник DEC равнобедренный, и $EC==CD=2$. Получим прямоугольный треугольник BEC с гипотенузой $EC=2$ и катетом $BC=\sqrt{3}$. По теореме Пифагора $BE=1$.

Ключевым моментом этой задачи является расположение точки на прямой относительно двух данных на ней точек.

1. Если точка E лежит между A и B (точка E_1 на рис. 5), то $AE=1$.

2. Если точка B лежит между A и E (точка E_2 на рис. 5), то $AE=3$.

3. Положение точки A между B и E невозможно, так как в этом случае $\angle AED>\angle DEC$ (сделайте рисунок), т.е. не выполняется условие задачи.

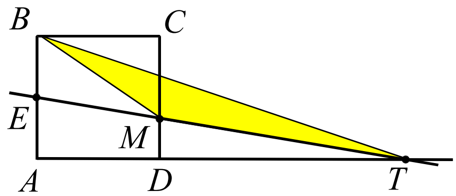
Ответ: 1 или 3.

Пример 7. *Через середину стороны AB квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образующая с прямой AB угол α, $\operatorname{tg}\alpha=3$. Найдите площадь треугольника BMT, если сторона квадрата $ABCD$ равна* 4.

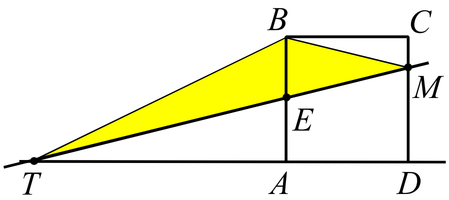
Решение. Возможно несколько вариантов рисунков, удовлетворяющих условию задачи.

1. Прямая, проходящая через середину E стороны AB, пересекает <u>*отрезок*</u> CD и продолжение отрезка AD за точку D (см. рис. 6*а*).

$$S_{BMT}=S_{BTE}-S_{BME}=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot BE\cdot AT-\frac{1}{2}\cdot BE\cdot AD=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot BE\cdot(AE\cdot\operatorname{tg}\alpha-AD)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(2\cdot 3-4)=2.$$



а



б

Рис. 6

2. Прямая, проходящая через середину E стороны AB, пересекает <u>*отрезок*</u> CD и продолжение отрезка AD за точку A (см. рис. 6*б*).

$$S_{BMT}=S_{BTE}+S_{BME}=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot BE\cdot AT+\frac{1}{2}\cdot BE\cdot AD=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot BE\cdot(AE\cdot\operatorname{tg}\alpha+AD)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(2\cdot 3+4)=10.$$

Случаи, перечисленные ниже, невозможны (почему?).

3. Прямая, проходящая через середину E стороны AB, пересекает продолжение отрезка CD за точку D и <u>отрезок</u> AD.

4. Прямая, проходящая через середину E стороны AB, пересекает продолжение отрезка CD за точку C и <u>отрезок</u> BC.

***Ответ*:** 2 или 10.

взаимное расположение прямой и точки вне прямой

Рассмотрим расположение прямой и точки, которая является центром окружности или точкой пересечения прямых.

Пример 8. *Дан параллелограмм $ABCD$. Биссектрисы его углов A и D делят сторону BC на три равные части. Вычислите стороны параллелограмма, если его периметр равен* 40.

Решение. Обозначим точку пересечения биссектрис через M, а точки пересечения биссектрис AM и DM со стороной BC через N и K соответственно. В зависимости от расположения точки M относительно прямой (отрезка) CD возможны два варианта для чертежа.

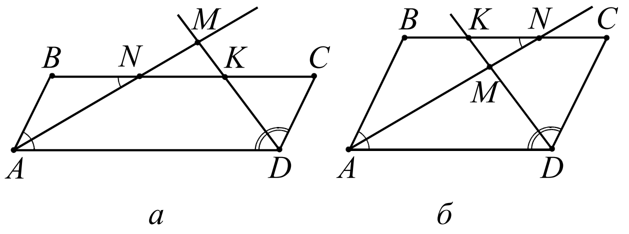


Рис. 7

1. Пусть точка M расположена вне параллелограмма. Так как биссектриса AM отсекает от параллелограмма равнобедренный треугольник ABN (см. рис. 7*а*)), то

$$AB = BN = NK = KC = x.$$

Периметр параллелограмма равен 40, поэтому из уравнения

$$2(x + 3x) = 40$$

находим $x = 5$. Значит, $AB = 5$, $BC = 15$.

2. Если точка M расположена внутри параллелограмма (см. рис. 7*б*)), то

$$NC = x \text{ и } AB = BN = 2x.$$

Из уравнения

$$2(2x + 3x) = 40$$

находим $x = 4$. Значит, $AB = 8$ и $BC = 8 + 4 = 12$.

***Ответ*:** 5; 15 или 8; 12.

Пример 9. *Прямая отсекает от сторон прямого угла отрезки* 3 *и* 4. *Найдите радиус окружности, касающейся этой прямой и сторон угла.*

Решение. Возможны два случая расположения центра указанной окружности относительно прямой (отрезка) AB (см. рис. 8). Отсюда получаем два вида окружностей для треугольника ABC: вписанная и вневписанная.

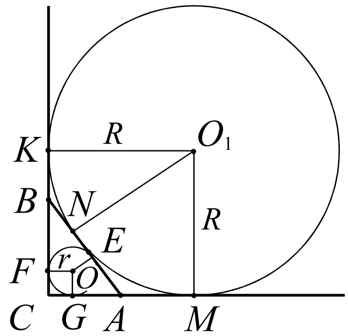


Рис. 8

1. Окружность вписана в треугольник.

1-*й способ*. Пусть r – радиус вписанной окружности. Так как $FOGC$ – квадрат и отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны, то

$$AG = AE = b - r, \; BF = BE = a - r.$$

Тогда

$$c = AB = AE + BE = b - r + a - r.$$

Отсюда

$$r = \frac{a + b - c}{2} = \frac{3 + 4 - 5}{2} = 1.$$

2-*й способ*. Выразим площадь прямоугольного треугольника двумя способами:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AC = 6, \; S_{ABC} = pr, \text{ где}$$

$$p = \frac{CA + BC + BA}{2} = 6.$$

Тогда из равенства площадей получаем

$$r=\frac{S_{ABC}}{p}=\frac{6}{6}=1.$$

2. Окружность является вневписанной для треугольника ABC (см. рис. 8). Пусть $R-$ радиус вневписанной окружности. $BK=BN$ и $NA=AM$, как отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки. Учитывая, что CKO_1M – квадрат, получим

$$2R=KC+CM=$$
$$=BC+BN+AN+AC=P_{ABC}.$$

Отсюда $R=p_{ABC}=\dfrac{3+4+5}{2}=6$.

Ответ: 1 или 6.

Пример 10. *Дана трапеция ABCD, основания которой* $BC=44$, $AD=100$, $AB=CD=35$. *Окружность, касающаяся прямых* AD *и* AC, *касается стороны* CD *в точке* K. *Найдите длину отрезка* CK.

- *Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на большее основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали – полусумме оснований (средней линии).*
- *Пусть окружность вписана в треугольник ABC. Тогда расстояние от вершины A до точки касания окружности со стороной AB равно*

$$x=p-a=\frac{b+c-a}{2}$$

- *Пусть окружность касается стороны BC треугольника ABC и продолжений сторон AB и AC. Тогда расстояние от вершины A до точки касания окружности с прямой AB равно полупериметру треугольника ABC.*

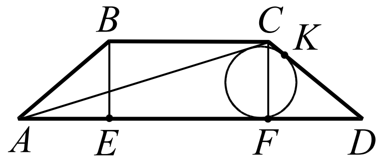
Решение. Опустим из вершин B и C трапеции на сторону AD перпендикуляры BE и CF соответственно (см. рис. 9). Тогда

$$AE=\frac{100-44}{2}=28,$$
$$AF=\frac{100+44}{2}=72.$$

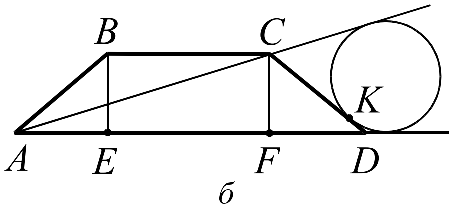
Из теоремы Пифагора для прямоугольных треугольников ABE и ACF находим BE и AC:

$$BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=\sqrt{35^2-28^2}=21,$$
$$AC=\sqrt{AF^2+CF^2}=\sqrt{72^2+21^2}=75.$$

Возможны два случая расположения окружности, заданной в условии.



а



б

Рис. 9

1. Окружность вписана в треугольник ACD (см. рис. 9*а*). Получаем

$$CK=\frac{AC+CD-AD}{2}=\frac{75+35-100}{2}=5.$$

2. Случай, в котором окружность является вневписанной для треугольника ACD (см. рис. 9*б*), рассмотрите самостоятельно.

Ответ: 5 или 30.

Пример 11. *Дан параллелограмм* $ABCD$, $AB=2$, $BC=3$, $\angle A=60°$. *Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырехугольника ABOD.*

- *Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник.*

Решение. Возможны два случая расположения окружности, указанной в условии задачи, относительно биссектрисы угла D.

1. Окружность касается сторон угла в с вершиной в точке A и является вписанной в треугольник AFD (см. рис. 10*а*). Треугольник AFD – равнобедренный, а так как $\angle A=60°$, то этот треугольник явля-

ется равносторонним со стороной 3. Радиус вписанной в него окружности равен

$$r = \frac{AD\sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

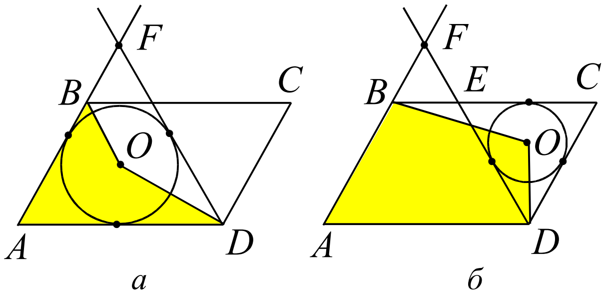


Рис. 10

В этом случае искомая площадь находится следующим образом:

$$S_{ABOD} = S_{AOB} + S_{AOD} =$$

$$= \frac{1}{2} AB \cdot r + \frac{1}{2} AD \cdot r = \frac{5\sqrt{3}}{4}.$$

2. Окружность вписана в угол с вершиной в точке C и является вписанной в треугольник ECD (см. рис. 10*б*). Тогда:

$$S_{ABOD} = S_{ABCD} - S_{BCO} - S_{DOC} = \frac{13\sqrt{3}}{6}.$$

Ответ: $\frac{5\sqrt{3}}{4}, \frac{13\sqrt{3}}{6}$.

взаимное расположение прямой и двух точек вне прямой

Рассмотрим примеры, в которых две точки расположены по одну сторону от прямой или по разные. При этом точки обычно располагаются в одной или разных полуплоскостях, связанные некоторым условием (например, принадлежат одной окружности, лежат на одном перпендикуляре и т.д.).

Пример 12. *Около треугольника ABC описана окружность с центром O. Найдите величину угла ACB, если угол OCB равен $10°$, а угол AOC равен $40°$.*

Решение. Нарисуем окружность с центром в точке O (см. рис. 11). Зафиксируем сторону BC. Проведем диаметр CC_1. Тогда дуга окружности BC_1, на которую опирается центральный угол BOC_1, равна $20°$.

Рассмотрим радиус OC. В зависимости от расположения точек A и B относительно прямой OC можно построить два центральных угла COA и COA_1 (см. рис. 11), равных $40°$. Тогда возникает два треугольника, удовлетворяющих условиям задачи, ABC и CBA_1.

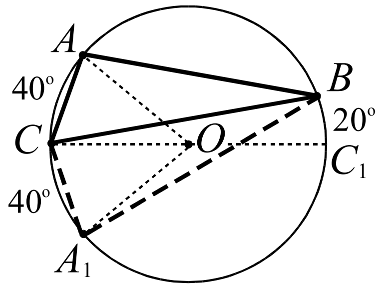


Рис. 11

Угол ACB треугольника ABC опирается на дугу AB, равную $120°$. Значит $\angle ACB = 60°$.

Угол A_1CB треугольника CBA_1 опирается на дугу A_1C_1B, равную $160°$. Значит $\angle A_1CB = 80°$.

Ответ: $60°$ или $80°$.

взаимное расположение точки и двух параллельных прямых

Пример 13. *Трапеция с основаниями 14 и 40 вписана в окружность радиуса 25. Найдите высоту трапеции.*

- *Трапеция вписана в некоторую окружность тогда и только тогда, когда она является равнобедренной.*
- *Радиус (диаметр), перпендикулярный хорде, делит хорду пополам.*
- *Центр окружности, описанной около трапеции, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам трапеции.*

Решение. Трапеция вписана в окружность, поэтому она равнобедренная. Пусть $BC = 14$ – хорда окружности радиуса 25. Существует две хорды, параллельные BC и равные 40 (см. рис. 12). Соответственно, в окружность можно вписать две трапеции с основаниями 14 и 40. Центр O на серединном перпендикуляре к BC.

1. В трапеции $ABCD$ центр O окружности лежит внутри трапеции. В этом случае высота $EF = EO + OF$. Из прямоугольного треугольника AOE, в котором $AO = 25$, $AE = \frac{AD}{2} = 20$, получаем

$$EO = \sqrt{AO^2 - AE^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15.$$

Из прямоугольного треугольника BFO, в котором $BO = 25$, $BF = \frac{BC}{2} = 7$, получаем

$$OF = \sqrt{BO^2 - BF^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24.$$

Тогда

$$EF = EO + OF = 39.$$

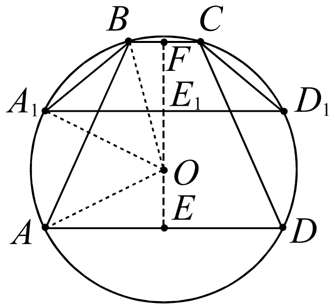


Рис. 12

2. В трапеции A_1BCD_1 центр O окружности лежит вне трапеции (см. рис. 12). Действуя аналогичным образом, находим

$$E_1F = FO - OE_1 = 9.$$

Ответ: 39 или 9.

2. Взаимное расположение прямолинейных фигур

взаимное расположение треугольников

Пример 14. *Дан равнобедренный треугольник ABC,* $AB = BC = 10$ *и* $AC = 12$. *Параллельно боковым сторонам треугольника на одинаковом расстоянии от них проведены прямые. Найти это расстояние, если площадь треугольника, образованного этими прямыми и основанием, лежащим на прямой AC, равна* 12.

Решение. Проведем прямую BD, где точка D – основание высоты данного треугольника. Проводя прямые, параллельные сторонам BC и BA, убеждаемся, что они могут образовывать треугольник с основанием, лежащим на прямой AC, распложенный в верхней или нижней полуплоскости относительно AC.

1. Рассмотрим случай, представленный на рис. 13*а*, когда прямые $EF \parallel BC$ и $EG \parallel AB$.

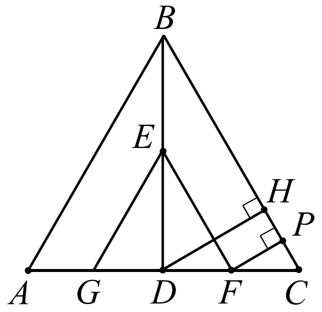


Рис. 13*а*

Тогда $DC = 6$ и $BD = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$. Пусть $DF = x$, а $DE = y$, тогда используя подобие треугольников BDC и EDF, площадь треугольника GFE, составим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{8}{y} = \frac{6}{x} \\ xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

Отсюда следует, что коэффициент подобия равен

$$\frac{DC}{DF} = \frac{6}{3} = 2.$$

Проведем перпендикуляры DH и FP на прямую BC. Так как высота DH в прямоугольном треугольнике BDC равна

$$\frac{BD \cdot DC}{BC} = \frac{8 \cdot 6}{10} = 4{,}8,$$

то $FP = \frac{4{,}8}{2} = 2{,}4$.

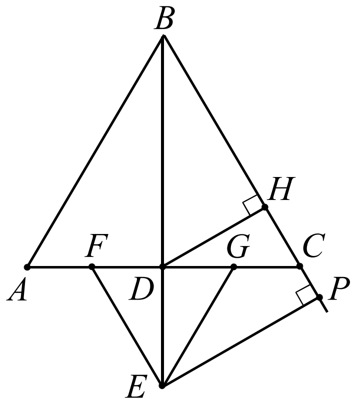


Рис. 13*б*

2. Второй случай расположения прямых EF и EG (см. рис. 13*б*), приводит к ответу 7,2 (получите самостоятельно).

Другие варианты расположения прямых не соответствуют условию задачи.

Ответ: 2,4 или 7,2.

взаимное расположение многоугольников

Пример 15. *Два ромба ABCD и AMHK, имеющие общую вершину A, расположены так, что стороны AB и AM образуют угол в* $30°$. *Известно, что углы при вершине A обоих ромбов равны* $60°$, *площадь пересечения ромбов равна* $5\sqrt{3}$, *а площадь их объединения равна* $23\sqrt{3}$. *Найти площадь каждого из ромбов.*

Решение. Исследование условия задачи показывает, что размещение ромбов зависит от положения точки H на луче AB. Обозначим стороны ромбов $ABCD$ и $AMHK$ через a и b соответственно.

1. Пусть $AH \le AB$ (см. рис. 14*а*).

Так как $S_{ABCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ и $S_{AMHK} = \frac{b^2\sqrt{3}}{2}$, причем пересечение ромбов есть треугольник AHK, а объединение ромбов состоит из ромба $ABCD$ и треугольника AMH, то получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = 23\sqrt{3} \\ \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = 5\sqrt{3}. \end{cases}$$

Отсюда имеем $a = 6,\ b = 2\sqrt{5}$.

Из треугольника AHK, используя теорему косинусов, находим $AH = 2\sqrt{15}$. Что противоречит условию, так как $AH > AB$.

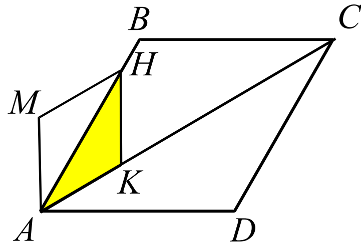


Рис. 14*а*

2. Если $AB < AH < 3AB$ (см. рис. 14*б*), то пересечение ромбов есть четырехугольник $ABEK$, объединение состоит из ромба $ABCD$ и двух треугольников AMH и BHE.

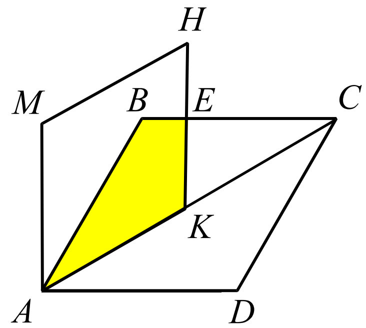


Рис. 14*б*

Из треугольника AMH по теореме косинусов находим $AH = b\sqrt{3}$, а $BH = b\sqrt{3} - a$.

Так как $\angle BEH = 90°$, $\angle EBH = 60°$, то

$$S_{BHE} = \frac{(\sqrt{3}b - a)^2\sqrt{3}}{8},$$

$$S_{AHK} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4},$$

$$S_{ABEK} = S_{AHK} - S_{BHE}.$$

Составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4}+\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}+\dfrac{(\sqrt{3}b-a)^2\sqrt{3}}{8}=23\sqrt{3} \\ \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4}-\dfrac{(\sqrt{3}b-a)^2\sqrt{3}}{8}=5\sqrt{3}. \end{cases}$$

Получаем $\begin{cases} a=4\sqrt{2} \\ b=2\sqrt{6} \end{cases}$ или $\begin{cases} a=2\sqrt{6} \\ b=4\sqrt{2} \end{cases}$, что соответствует рассматриваемому случаю $AB<AH$ (проверьте!). При этом площади ромбов принимают одно из значений $12\sqrt{3}$ или $16\sqrt{3}$.

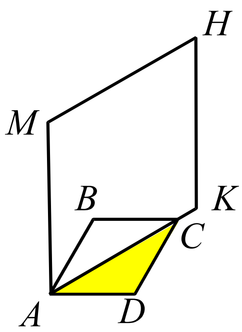


Рис. 14*в*

3. Пусть $AH>3AB$ (см. рис. 14*в*).

В этом случае пересечение ромбов есть треугольник *ABC*, а объединение состоит из ромба *AMHK* и треугольника *ACD*. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{b^2\sqrt{3}}{2}+\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=23\sqrt{3} \\ \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=5\sqrt{3}. \end{cases}$$

Отсюда имеем $a=2\sqrt{5}$, $b=6$. Но тогда $AH<3AB$.

***Ответ*:** $S_{ABCD}=16\sqrt{3}$; $S_{AMHK}=12\sqrt{3}$ или $S_{ABCD}=12\sqrt{3}$; $S_{AMHK}=16\sqrt{3}$.

3. Взаимное расположение окружностей

Взаимное расположение окружностей можно различать по внешнему признаку (касающиеся, пересекающиеся, непересекающиеся) или по внутреннему признаку (взаимное расположение центров окружностей относительно общей касательной, общей хорды и т.д.).

расположение центров окружностей относительно общей касательной

В условии задачи этого типа фигурируют две окружности, касающиеся одной прямой, но не указано расположение центров этих окружностей относительно этой прямой. Соответственно эта прямая является внутренней или внешней касательной для этих окружностей.

Пример 16. *Прямая касается окружностей радиусов R и r. Известно, что расстояние между их центрами равно a, причем $R>r$ и $a>r+R$. Найдите расстояние между точками касания.*

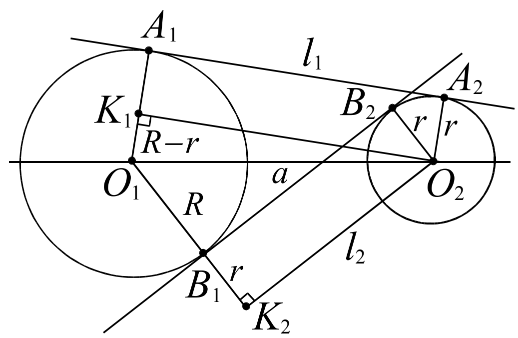


Рис. 15

Решение. Пусть O_1 – центр окружности радиуса *R*, O_2 – центр окружности радиуса *r*, A_1A_2 и B_1B_2 – внешняя и внутренняя касательные (см. рис. 15). Из центра меньшей окружности опустим перпендикуляры O_2K_1 и O_2K_2 на радиус O_1A_1 и продолжение радиуса O_1B_1 соответственно.

Рассмотрим прямоугольные треугольники $O_1K_1O_2$ (гипотенуза $O_1O_2=a$, катет $O_1K_1=R-r$) и $O_1K_2O_2$ (гипотенуза $O_1O_2=a$ катет $O_1K_2=R+r$). Из теоремы Пифагора для этих треугольников получим:

$l_1 = A_1A_2 = \sqrt{a^2-(R-r)^2}$ (*длина внешней касательной*)

$l_2 = B_1B_2 = \sqrt{a^2-(R+r)^2}$ (*длина внутренней касательной*).

Ответ: $\sqrt{a^2-(R-r)^2}$ или $\sqrt{a^2-(R+r)^2}$.

расположение центров окружностей относительно их общей точки касания

В условии задачи этого типа фигурируют две окружности, но не указан тип касания (внешний или внутренний, см. рис. 16).

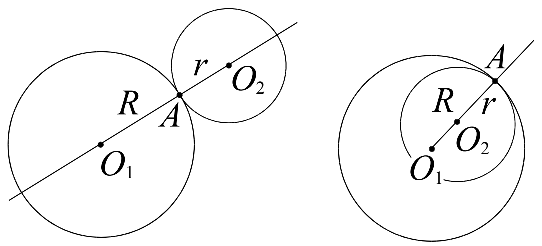


Рис. 16

- *При любом способе касания точка касания и центры окружностей лежат на одной прямой.*
- *При внешнем касании центры окружностей расположены на линии центров по разные стороны от точки касания, при внутреннем – по одну сторону.*
- *Расстояние между центрами касающихся окружностей радиусов R и r ($R \geq r$) равно $R+r$ при внешнем касании и $R-r$ при внутреннем.*

Пример 17. (**ЕГЭ 2010**). *Окружности радиусов 2 и 4 касаются в точке B. Через точку B проведена прямая, пересекающая второй раз меньшую окружность в точке A, а большую – в точке C. Известно, что $AC = 3\sqrt{2}$. Найдите BC.*

Решение. Поскольку в условии не сказано о типе касания окружностей (внешнее или внутреннее), то рассмотрим два случая.

1. Если окружности касаются внешним образом, то проведем через точку B общую касательную KK_1 (она перпендикулярна линии центров, см. рис. 17*а*).

Треугольники AO_2B и O_1BC подобны по первому признаку подобия. В этих треугольниках $\angle O_2BA = \angle O_1BC$, как вертикальные; $\angle AO_2B = \angle BO_1C$ как центральные углы, опирающиеся на дуги, имеющие равную меру. $\angle ABK_1 = \angle KBC$, как вертикальные, и каждый из этих углов – угол между хордой и касательной. Следовательно, соответствующие дуги имеют равную меру.

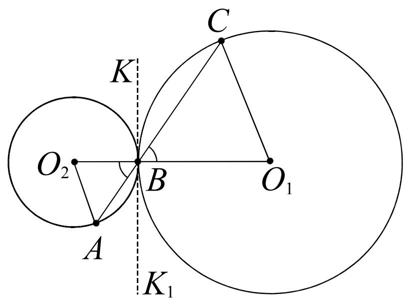


Рис. 17*а*

Для подобных треугольников AO_2B и O_1BC можем записать

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BO_2}{BO_1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$BC = \frac{2}{3}AC = \frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

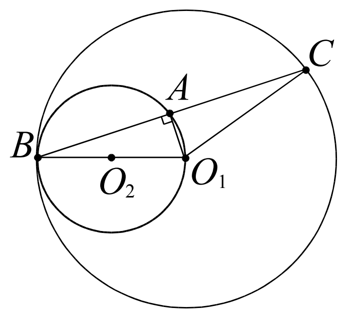


Рис. 17*б*

2. Окружности касаются внутренним образом (см. рис. 17*б*). В этом случае при исходных числовых данных задача не имеет решения (докажите самостоятельно).

Ответ: $2\sqrt{2}$.

Пример 18. *Окружности S_1 и S_2 радиусов R и r ($R > r$) соответственно касаются в точке A. Через точку B, лежащую на окружности S_1, проведена прямая, касающаяся окружности S_2 в точке M. Найдите BM, если известно, что $AB = a$.*

Решение. Возможны два случая расположения указанных окружностей в зависимости от типа касания.

1. Пусть окружности касаются внешним образом (см. рис. 18).

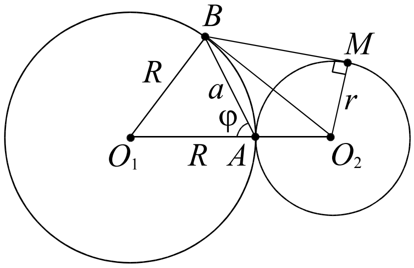


Рис. 18

1-*й способ решения*. Пусть O_1 и O_2 – центры окружностей S_1 и S_2 соответственно, а $\angle O_1AB = \varphi$ (см. рис. 18). По теореме косинусов для треугольника O_1AB:

$$O_1B^2 = O_1A^2 + AB^2 - 2O_1A \cdot AB\cos\varphi$$

или

$$R^2 = R^2 + a^2 - 2Ra\cos\varphi.$$

Отсюда получим $\cos\varphi = \dfrac{a}{2R}$.

Теперь используем теорему косинусов для треугольника O_2AB:

$$O_2B^2 = O_2A^2 + AB^2 + 2O_2A \cdot AB\cos\varphi$$

или

$$O_2B^2 = r^2 + a^2 + 2r \cdot a\cos\varphi.$$

Подставив $\cos\varphi = \dfrac{a}{2R}$ в последнее равенство, получим $O_2B^2 = r^2 + a^2 + \dfrac{a^2r}{R}$.

В прямоугольном треугольнике O_2BM ($\angle BMO_2 = 90°$), используя теорему Пифагора, находим $BM^2 = O_2B^2 - r^2 =$

$$= r^2 + a^2 + \frac{a^2r}{R} - r^2 = a^2\left(1 + \frac{r}{R}\right).$$

Отсюда $BM = a \cdot \sqrt{1 + \dfrac{r}{R}}$.

2-*й способ решения*. Продолжим AB до пересечения с окружностью S_2 в точке E (см. рис. 19). Треугольники AO_1B и AO_2E равнобедренные и подобные, так как $\angle O_1AB = \angle EAO_2$. Следовательно, $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{r}{R}$ и $AE = \dfrac{ar}{R}$.

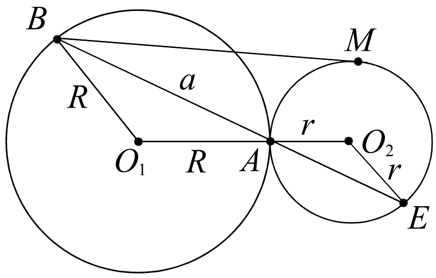


Рис. 19

По теореме о секущей и касательной имеем

$$BM^2 = BA \cdot BE,$$

$$BM^2 = BA \cdot (BA + AE),$$

$$BM^2 = a \cdot \left(a + \frac{ar}{R}\right),$$

$$BM = \sqrt{a \cdot \left(a + \frac{ar}{R}\right)} = a \cdot \sqrt{1 + \frac{r}{R}}.$$

2. Пусть окружности касаются внутренним образом (см. рис. 20). Тогда, проводя аналогичные вычисления, получим $BM = a \cdot \sqrt{1 - \dfrac{r}{R}}$.

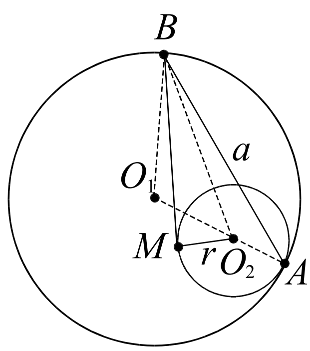


Рис. 20

Ответ: $a \cdot \sqrt{1 \pm \dfrac{r}{R}}$

Пример 19. *Дана окружность радиуса 2 с центром O. Хорда AB пересекает радиус OC в точке D, причем* $\angle CDA = 120^\circ$. *Найдите радиус окружности, вписанной в угол ADC и касающейся дуги AC, если* $OD = \sqrt{3}$.

Решение. Возможны два случая расположения указанной окружности в зависимости от типа касания с данной окружностью. В обоих случаях центры O_1 и O_2 этих окружностей будут лежать на биссектрисе угла ADC (см. рис. 21).

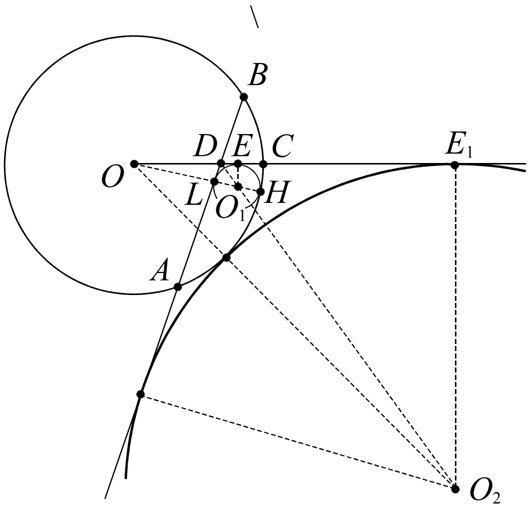


Рис. 21

1. Рассмотрим внутреннее касание окружностей. Пусть радиус искомой окружности с центром в точке O_1 равен r. E – точка касания этой окружности с радиусом OC. В прямоугольном треугольнике DEO_1 $\angle EDO_1 = 60^\circ$ (O_1D – биссектриса угла ADC)

$$DE = r \cdot \mathrm{ctg} 60^\circ = \frac{r}{\sqrt{3}}.$$

Используя теорему о секущей и касательной, получим

$$OL \cdot OH = OE^2,$$

$$(2-2r)\cdot 2 = \left(\sqrt{3} + \frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2,$$

$$r^2 + 18r - 3 = 0.$$

Условию задачи удовлетворяет положительный корень $r = 2\sqrt{21} - 9$.

2. В случае внешнего касания искомая окружность радиуса R с центром в точке O_2 касается продолжений сторон DC и DA и данной окружности. Тогда, проводя аналогичные вычисления, получим $R = 3 + 2\sqrt{3}$.

Ответ: $2\sqrt{21} - 9$ или $3 + 2\sqrt{3}$.

Пример 20. *Вершина равнобедренного треугольника с боковой стороной 5 и основанием 8 служит центром данной окружности радиуса 2. Найдите радиус окружности, касающейся данной и проходящей через концы основания треугольника.*

Решение. Пусть D – середина основания AC данного треугольника ABC. Обозначим через E и F точки пересечения прямой BD и окружности радиуса 2 с центром в точке B. Тогда (см. рис. 22):

$$AD = 4,\ BD = 3,\ ED = 1,\ FD = 5.$$

Из теоремы Пифагора для прямо-

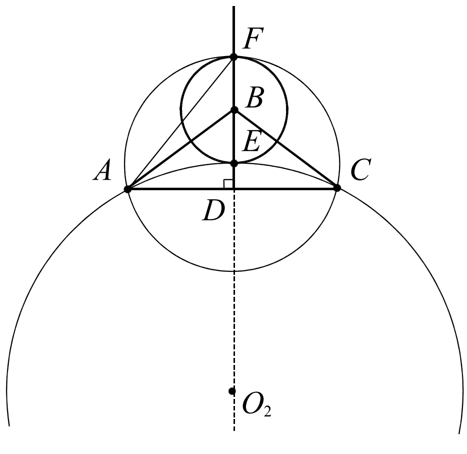


Рис. 22

угольных треугольников AED и AFD соответственно имеем:

$$AE = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17},$$

$$AF = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}.$$

Находим площади треугольников AEC и AFC:

$$S_{AEC} = \frac{1}{2}\cdot AC \cdot ED = \frac{1}{2}\cdot 8 \cdot 1 = 4,$$

$$S_{AFC} = \frac{1}{2}\cdot AC \cdot FD = \frac{1}{2}\cdot 8 \cdot 5 = 20.$$

Возможны два случая расположения указанной в условии окружности в зависимости от типа касания с данной окружностью. В обоих случаях центры O_1 и O_2 этих окружностей будут лежать на биссектрисе угла – прямой BD (см. рис. 22).

1. Пусть окружности касаются внешним образом. Тогда искомая окружность описана около треугольника AEC. Найдем ее радиус по формуле

$$R=\frac{AE\cdot EC\cdot AC}{4S_{AEC}}=\frac{17\cdot 8}{4\cdot 4}=\frac{17}{2}.$$

2. Пусть окружности касаются внутренним образом. Тогда искомая окружность описана вокруг треугольника AFC. Найдем ее радиус

$$R=\frac{AF\cdot FC\cdot AC}{4S_{AFC}}=\frac{41\cdot 8}{4\cdot 20}=\frac{41}{10}.$$

Ответ: $\frac{17}{2}$ или $\frac{41}{10}$.

расположение центров окружностей относительно общей хорды

В условии задачи этого типа фигурируют две пересекающиеся окружности, но не указано расположение центров окружностей относительно их общей хорды (см. рис. 23*а* и 23*б*).

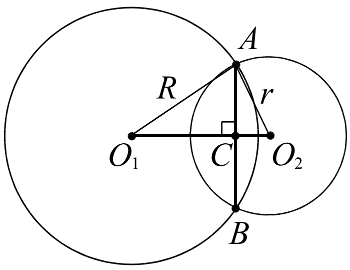


Рис. 23*а*

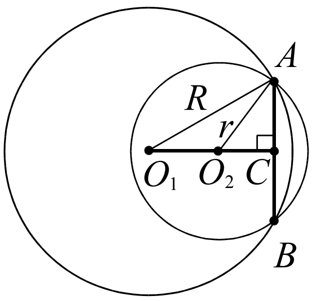


Рис. 23*б*

- *Пересекающиеся окружности в точках A и B имеют общую хорду AB.*
- *Общая хорда перпендикулярна линии центров и делится ею пополам.*

Пример 21. *Окружности радиусов* 10 *и* 17 *пересекаются в точках A и B. Найдите расстояние между центрами окружностей, если* $AB=16$.

Решение. Отрезок AB – общая хорда данных окружностей. В условии не указано расположение центров окружностей относительно AB. Поэтому задача допускает два вида чертежа.

1. Пусть центры окружностей лежат по разные стороны от их общей хорды AB (см. рис. 23*а*). Линия центров O_1O_2 перпендикулярна хорде AB и делит ее в точке пересечения C пополам. Это следует из равенства треугольников O_1AO_2 и O_1BO_2 по трем сторонам и совпадения оснований высот, опущенных из точек A и B. Тогда из прямоугольных треугольников O_1AC и O_2AC соответственно получаем:

$$O_1C=\sqrt{17^2-8^2}=15$$

и

$$O_2C=\sqrt{10^2-8^2}=6.$$

Искомое расстояние между центрами равно

$$O_1O_2=O_1C+O_2C=15+6=21.$$

2. Пусть центры окружностей лежат по одну сторону от хорды AB (см. рис. 23*б*). Аналогично поступая, находим

$$O_1O_2=O_1C-O_2C=15-6=9.$$

Ответ: 21 или 9.

Пример 22. *Окружности с центрами* O_1 *и* O_2 *пересекаются в точках A и B. Известно, что* $\angle AO_1B=90°$, $\angle AO_2B=$ $=60°$, $O_1O_2=a$. *Найдите радиусы окружностей.*

Решение. Отрезок AB – общая хорда данных окружностей. В условии не указано расположение центров окружностей относительно AB. Поэтому задача допускает два вида чертежа.

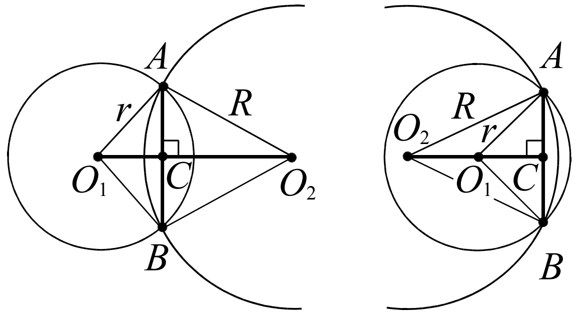


Рис. 24

1. Пусть центры окружностей лежат по разные стороны от их общей хорды AB (см. рис. 24*а*). Так как треугольники AO_1B и AO_2B равнобедренные, то линия центров является биссектрисой углов AO_1B и AO_2B. Получаем

$$\angle AO_1C = 45°,\ \angle AO_2C = 30°.$$

Пусть $AC = x$. Треугольник AO_1C прямоугольный, $\angle AO_1C = \angle CAO_1 = 45°$. Значит $O_1C = AC = x$. Для треугольника AO_2C имеем

$$O_2C = AC \cdot \mathrm{ctg}30° = x\sqrt{3}.$$

Тогда $O_1O_2 = O_1C + O_2C$ или $a = x + x\sqrt{3}$. Отсюда находим $x = \dfrac{a}{\sqrt{3}+1}$.

Тогда

$$O_1A = x\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1},$$

$$O_2A = 2AC = 2x = \frac{2a}{\sqrt{3}+1}.$$

2. Пусть центры окружностей лежат по одну сторону от хорды AB (см. рис. 24*б*). Проводя аналогичные рассуждения, получим

$$O_1A = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1},\ O_2A = \frac{2a}{\sqrt{3}-1}.$$

Ответ: $\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}, \dfrac{2a}{\sqrt{3}+1}$ или $\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}, \dfrac{2a}{\sqrt{3}-1}$.

расположение центров окружностей относительно хорды большей окружности

В условии задачи следующего типа фигурируют две окружности, одна из которых расположена внутри другой и касается хорды окружности большего радиуса (см. рис. 25).

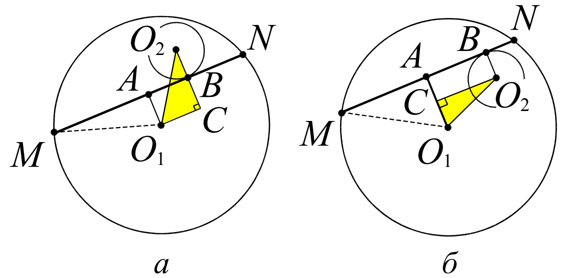


Рис. 25

- *Вычисления в этой задаче сводятся к применению теоремы Пифагора в треугольнике O_1O_2C, при этом расстояние O_1A находится из теоремы Пифагора для треугольника MAO_1* (см. рис. 25*а, б*).

Пример 23. *Окружности радиусов* 20 *и* 3 *касаются внутренним образом. Хорда AB большей окружности касается меньшей окружности в точке M. Найдите длины отрезков AM и MB, если* $AB = 32$.

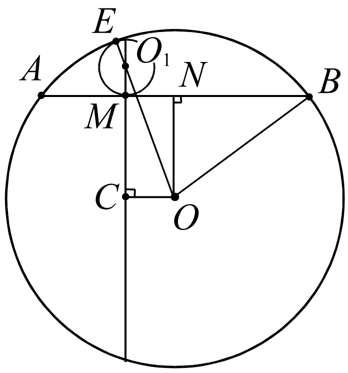


Рис. 26*а*

Решение. Пусть точка N – середина хорды AB, тогда расстояние от центра O окружности радиуса 20 до хорды AB равно

$$ON = \sqrt{OB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 12.$$

Рассмотрим два случая.

1. Центры O и O_1 окружностей расположены по разные стороны относительно хорды AB (см. рис. 26*а*), $O_1M = 3$.

Продолжив перпендикуляр O_1M к хорде AB за точку M и опустив на него перпендикуляр из центра O, получим прямоугольный треугольник OO_1C, в котором $OO_1 = 17$, $O_1C = O_1M + MC = = O_1M + ON = 15$ и $OC = MN$. Тогда из теоремы Пифагора для треугольника OO_1C получаем

$$OC = \sqrt{OO_1^2 - O_1C^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8.$$

Тогда

$$AM = AN - MN = 16 - 8 = 8$$

и

$$MB = MN + NB = 8 + 16 = 24.$$

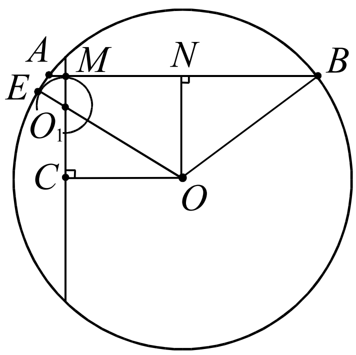


Рис. 26*б*

2. Центры O и O_1 окружностей расположены по одну сторону относительно хорды AB (см. рис. 26*б*). Тогда из теоремы Пифагора для треугольника OO_1C получаем

$$OC = \sqrt{OO_1^2 - O_1C^2} = \sqrt{17^2 - 9^2} = 4\sqrt{13}.$$

Тогда $AM = AN - MN = 16 - 4\sqrt{13}$ и $MB = MN + NB = 4\sqrt{13} + 16$.

Замечание. В данной задаче можно рассмотреть еще два случая, когда точка касания M расположена правее точки N. В этом случае ответы будут $AM = 24$ и $MB = 8$ или $AM = 16 + 4\sqrt{13}$ и $MB = 16 - 4\sqrt{13}$.

***Ответ*:** 24 и 8; $16 + 4\sqrt{13}$ и $16 - 4\sqrt{13}$.

Пример 24. *Расстояние между центрами двух окружностей равно* $5r$. *Одна из окружностей имеет радиус* r, *а вторая –* $7r$. *Хорда большей окружности касается меньшей окружности и делится точкой касания в отношении* $1:6$. *Найдите длину этой хорды.*

Решение. Воспользуемся рисунком 25. Пусть хорда $MN = 7x$. Тогда расстояние от центра O_1 равно

$$O_1A = \sqrt{MO_1^2 - \left(\frac{MN}{2}\right)^2} = 7\sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}},$$

а $AB = AN - NB = \dfrac{7x}{2} - x = \dfrac{5x}{2}$.

Рассмотрим два случая.

1. Центры O_1 и O_2 окружностей расположены по разные стороны относительно хорды MN. Так как $O_1O_2 = 5r$, $O_2B = r$, то, продолжив перпендикуляр O_2B к хорде MN за точку B и опустив на него перпендикуляр из O_1, получим прямоугольный треугольник O_1O_2C, в котором $O_2C = O_2B + BC = r + 7\sqrt{r^2 - \dfrac{x^2}{4}}$ и $O_1C = AB$. Тогда из теоремы Пифагора для треугольника O_1O_2C получаем

$$O_1C^2 = O_1O_2^2 - O_2C^2 \text{ или}$$

$$\frac{25x^2}{4} = 25r^2 - \left(r + 7\sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}}\right)^2.$$

Возводя в квадрат выражение, стоящее в скобках, получаем уравнение

$$6x^2 - 25r^2 = 14r\sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}}$$

или

$$\begin{cases} 36x^4 - 251x^2r^2 + 429r^4 = 0, \\ 6x^2 - 25r^2 \ge 0. \end{cases}$$

Последняя система не имеет решения, так как корни уравнения $x_1 = r\sqrt{3}$ и $x_2 = \dfrac{\sqrt{143}}{6}r$ не удовлетворяют условию $6x^2 - 25r^2 \ge 0$.

Это значит, что такой случай невозможен.

2. Центры O_1 и O_2 окружностей расположены по одну сторону относительно хорды MN. Так как $O_1O_2 = 5r$, $O_2B = r$, то, опустив на отрезок O_1A перпендикуляр из центра O_2, получим прямоугольный треугольник O_1O_2C, в котором

$O_1C = AO_1 - AC = 7\sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}} - r$ и

$O_2C = AB$. Тогда из теоремы Пифагора для треугольника O_1O_2C получаем

$$CO_2^2 = O_1O_2^2 - O_1C^2 \text{ или}$$

$$\frac{25x^2}{4} = 25r^2 - \left(7\sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}} - r\right)^2.$$

Возводя в квадрат выражение, стоящее в скобках, получаем уравнение

$$25r^2 - 6x^2 = 14r\sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}}$$

или

$$\begin{cases} 36x^4 - 251x^2r^2 + 429r^4 = 0, \\ 25r^2 - 6x^2 \ge 0. \end{cases}$$

Получаем два решения $x_1 = r\sqrt{3}$ и $x_2 = \frac{\sqrt{143}}{6}r$. Отсюда находим два значения $MN = 7\sqrt{3}\,r$ и $MN = \frac{7\sqrt{143}}{6}r$.

Ответ: $7\sqrt{3}\,r$ и $\frac{7\sqrt{143}}{6}r$.

Пример 25. (ЕГЭ, 2010). *В окружности, радиус которой равен* 15, *проведена хорда* $AB = 24$. *Точка C лежит на хорде AB так, что* $AC : BC = 1 : 2$. *Найдите радиус окружности, касающейся данной окружности и касающейся хорды AB в точке C.*

Решение. Возможны два случая расположения указанной окружности (см. рис. 27). Центры этих окружностей O_1 и O_2 будут лежать на перпендикуляре к хорде AB, проходящем через точку C.

1. Пусть точки O и O_1, где O – центр данной окружности, а O_1 – центр окружности, указанной в условии, лежат по разные стороны относительно прямой AB.

Так как $AC : BC = 1 : 2$, то $AC = 8$. Пусть N – середина хорды AB. Тогда из прямоугольного треугольника ONB получаем

$$ON = \sqrt{OB^2 - NB^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9.$$

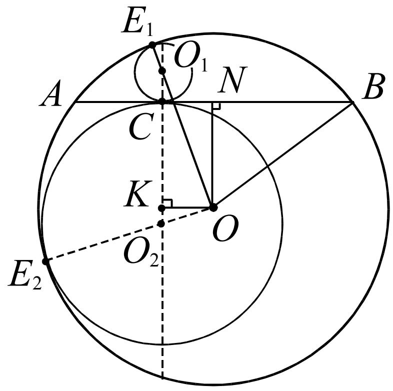


Рис. 27

Пусть K – середина хорды, перпендикулярной AB и проходящей через точку C. Четырехугольник $KCNO$ – прямоугольник,

$$OK = CN = AN - AC = 12 - 8 = 4.$$

Пусть искомый радиус равен r. Так как центры O, O_1 и точка касания E_1 лежат на одной прямой, то

$$OO_1 = OE_1 - O_1E_1 = 15 - r.$$

Из теоремы Пифагора для прямоугольного треугольника KO_1O, в котором $OK = 4$, $OO_1 = 15 - r$ и $KO_1 = KC + CO_1 = 9 + r$, получаем

$$OO_1^2 = OK^2 + KO_1^2$$

или

$$(15 - r)^2 = 4^2 + (9 + r)^2.$$

Отсюда $r = \frac{8}{3}$.

2. Точки O и O_2 лежат по одну сторону относительно прямой AB (см. рис. 27). В этом случае из теоремы Пифагора для прямоугольного треугольника KO_2O, в котором $OK = 4$, $OO_2 = 15 - r$ и $KO_2 = CO_2 - KC = r - 9$, получаем $r = \frac{32}{3}$.

Ответ: $\frac{8}{3}$ и $\frac{32}{3}$.

расположение точек касания окружности и прямой

Пример 26. *На стороне BA угла ABC, равного* 30°, *взята такая точка D, что* $AD = 2$ *и* $BD = 1$. *Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, D и касающейся прямой BC.*

Решение. Центр искомой окружности O – точка пересечения серединного перпендикуляра к отрезку AD и перпендикуляра к прямой BC, восставленного из точки касания E (см. рис. 28) окружности и прямой. Возможны два варианта положения окружности. В первом случае окружность касается луча BC, во втором точка касания E_1 лежит на продолжении луча BC за точку B.

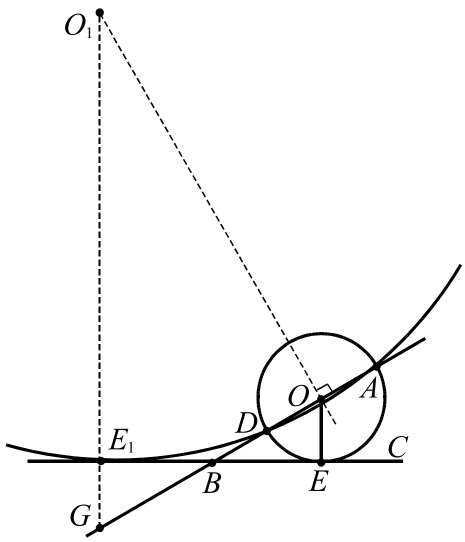


Рис. 28

1. Пусть точка касания лежит на луче BC. Тогда по теореме о касательной и секущей имеем

$$BE^2 = BD \cdot AB = 1 \cdot 3 = 3,$$

откуда $BE = \sqrt{3}$.

В треугольнике BDE $\angle DBE = 30°$, $BD = 1$, $BE = \sqrt{3}$. Тогда из теоремы косинусов получаем $DE^2 = DB^2 + BE^2 - 2 \cdot DB \cdot BE \cdot \cos(\angle ABE) = 1$, т.е. $DE = 1$. Так как $BD = DE$, то треугольник BDE – равнобедренный и $\angle BED = 30°$. Поскольку этот угол образован касательной BE и хордой DE, то дуга окружности DE равна $60°$. Следовательно, искомый радиус окружности равен хорде $DE = 1$. Тогда центр O окружности совпадает с серединой отрезка AD.

2. В случае, когда точка касания лежит на продолжении луча BC за точку B (см. рис. 28), радиус окружности находится из прямоугольного треугольника GO_1O, в котором $\angle OO_1G = 60°$, $GO = 4$, $GE_1 = 1$, и равен $GO_1 - GE_1 = 8 - 1 = 7$.

***Ответ*:** 1 или 7.

Опорная задача. *Отрезок общей внешней касательной к двум касающимся окружностям радиусов r и R равен* $2\sqrt{Rr}$.

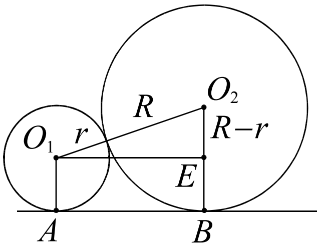


Рис. 29

Доказательство. Из прямоугольного треугольника O_1O_2E (см. рис. 29) получаем

$$AB = O_1E = \sqrt{O_1O_2^{\,2} - EO_2^{\,2}} = \\ = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}.$$

Пример 27. *Окружности радиусов* 4 *и* 9 *касаются внешним образом, лежат по одну сторону от некоторой прямой и касаются этой прямой. Найдите радиус окружности, касающейся каждой из двух данных и той же прямой.*

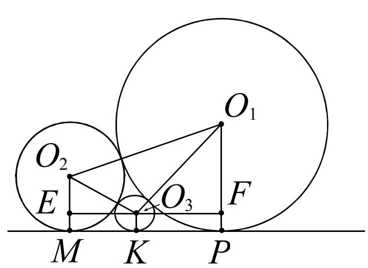


Рис. 30*а*

Решение. Перебор вариантов в задаче зависит от расположения точки касания третьей окружности с прямой относительно точек касания первых двух окружностей с этой прямой. Рассмотрим первый случай касания искомой окружности с центром O_3, радиуса r_3 и двух данных окружностей (см. рис. 30*а*). Тогда $MP = MK + KP$. Так как отрезок общей внешней касательной к двум касающимся окружностям радиусов r и R равен $2\sqrt{Rr}$ (следует из ответа примера 16 при $a = R + r$ или см. опорную задачу), то имеем

$$2\sqrt{4\cdot 9} = 2\sqrt{4\cdot r_3} + 2\sqrt{9\cdot r_3},$$

откуда $6 = 2\sqrt{r_3} + 3\sqrt{r_3}$ или $r_3 = 1{,}44$.

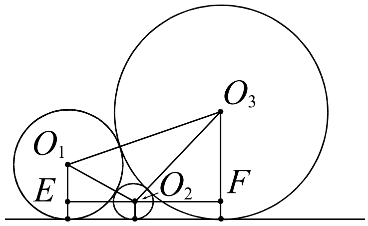


Рис. 30*б*

Второй случай (см. рис. 30*б*) рассмотрите самостоятельно.

Ответ: 1,44 или 36.

Пример 28. *Точка O – центр окружности радиуса* 2. *На продолжении радиуса OM взята точка A. Через точку A проведена прямая, касающаяся окружности в точке K. Известно, что* $\angle OAK = 60°$. *Найдите радиус окружности, вписанной в угол OAK и касающейся данной окружности внешним образом.*

Решение. Центр O_1 искомой окружности лежит на биссектрисе угла A, поэтому $\angle O_1AK_1 = 30°$ (рис. 31). K_1 – точка касания этой окружности с прямой AK.

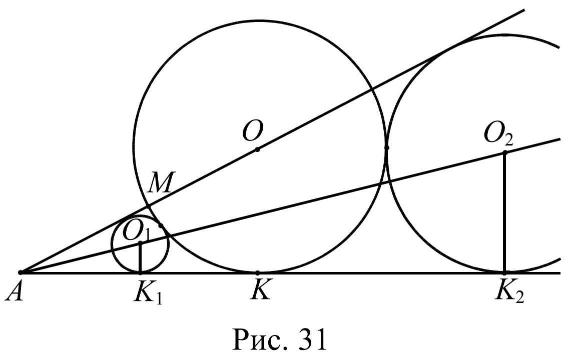


Рис. 31

Из треугольника O_1AK_1 находим $AK_1 = r\cdot \text{ctg}30° = r\sqrt{3}$, где r – радиус искомой окружности. Из треугольника OAK находим

$$AK = OK\cdot \text{ctg}60° = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Рассмотрение случаев в данной задаче связано с расположением точки касания искомой окружности с прямой AK относительно точки касания K (левее, правее).

Отрезок внешней касательной окружностей с центрами O и O_1 равен $2\sqrt{OK\cdot O_1K_1} = 2\sqrt{2r}$ (см. опорную задачу). Тогда получаем

$$AK = AK_1 + K_1K,$$
$$\frac{2}{\sqrt{3}} = r\sqrt{3} + 2\sqrt{2r}.$$

Решаем квадратное уравнение

$$3t^2 + 2\sqrt{6}\,t - 2 = 0,$$

где $t = \sqrt{r}$. Получаем единственный положительный корень $t = \dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3}$. Тогда

$$r = \left(\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{6-4\sqrt{2}}{3}.$$

Еще один случай расположения окружностей рассмотрите самостоятельно.

Ответ: $2 \pm \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Пример 29. *Найдите радиус окружности, вписанной в угол MKN равный* $2\arcsin 0{,}6$ *и касающейся окружности, радиуса* 4 *также вписанной в угол MKN.*

Решение. Центры окружностей вписанных в угол лежат на биссектрисе этого угла. Возможны два варианта расположения искомых окружностей (см. рис. 32). Пусть O – центр данной окружности, O_1 и O_2 центры искомых с радиусами r и R соответственно. Тогда $\angle OKN = \arcsin 0{,}6$.

1. Найдем радиус r. Проведем радиусы O_1B_1 и OB в точки касания со стороной KN и опустим из точки O_1 перпендикуляр O_1C_1 на OB. В прямоугольном

треугольнике O_1OC_1 $OO_1 = 4 + r$, $OC_1 = 4 - r$. Тогда из равенства

$$\sin(\angle OKN) = \frac{OC_1}{O_1O}$$

получим уравнение

$$\frac{4-r}{4+r} = \sin(\arcsin 0{,}6)$$

или

$$\frac{4-r}{4+r} = 0{,}6.$$

Отсюда $r = 1$.

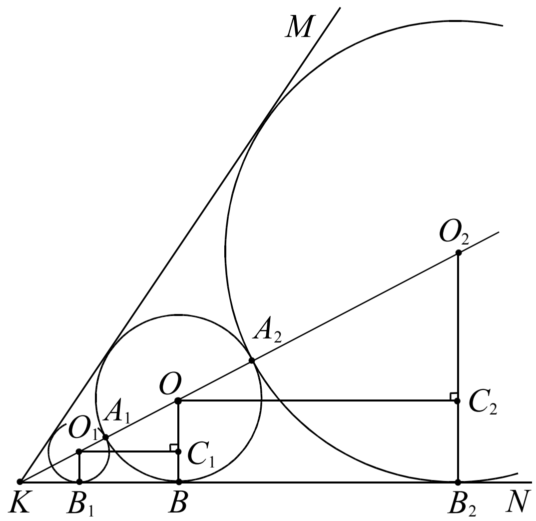


Рис. 32

2. При нахождении радиуса R, решая аналогичным образом, приходим к уравнению

$$\frac{R-4}{R+4} = 0{,}6.$$

Откуда получаем $R = 16$.

Ответ: 1 и 16.

4. Взаимное расположение элементов фигуры

В задачах этого типа фигурируют однотипные элементы фигуры (вершины, стороны, дуги, углы, высоты, биссектрисы, многоугольники и т.д.), однако условие допускает произвол выбора конкретного элемента из имеющихся у рассматриваемой фигуры.

выбор обозначений вершин многоугольника

К задачам этого типа относят такие задачи, условие которых допускает различные решения в зависимости от варианта буквенного обозначения вершин многоугольника.

Пример 30. *В параллелограмме ABCD один из углов равен* $60°$. *Точки* E *и* F *являются серединами смежных сторон, образующих острый угол. Площадь треугольника, отсекаемого прямой EF от параллелограмма ABCD, равна* S. *Найдите площадь треугольника, вершинами которого служат точки* E, F *и* C.

- *Медиана треугольника разбивает его на два равновеликих треугольника.*
- *Диагональ параллелограмма разбивает его на два равновеликих треугольника.*

Решение. Используя приведенные выше факты и построив пунктиром два дополнительных отрезка (см. рис. 33), получим, что площадь параллелограмма равна $8S$.

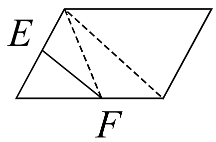


Рис. 33

Обозначение буквами вершин параллелограмма можно начать с любой вершины, поэтому возникает четыре разных рисунка, соответствующих условию данной задачи (см. рис. 34*а*, *б*, *в*, *г*). Треугольники, площадь которых нужно найти, на каждом из рисунков выделены темным фоном.

Площадь треугольника ECF на рис. 34*а* находим следующим образом:

$$S_{ECF} = S_{ABCD} - S_{AEF} - S_{EBC} - S_{FDC} =$$

$$= 8S - S - \frac{1}{2}S_{ABC} - \frac{1}{2}S_{ADC} =$$

$$= 8S - S - 2S - 2S = 3S.$$

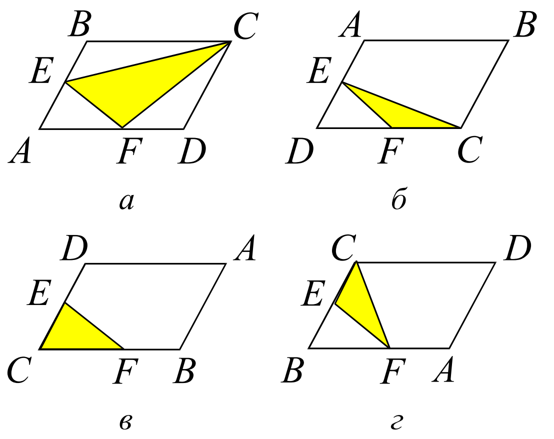


Рис. 34

В остальных случаях искомая площадь будет равна S.

Ответ: S или $3S$.

Пример 31. *Диагонали AC и BD трапеции ABCD пересекаются в точке E. Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника AED равна* 9, *а точка E делит одну из диагоналей в отношении* $1:3$.

- *Трапеция разбивается диагоналями на два равновеликих треугольника (примыкающих к боковым сторонам) и два подобных треугольника (примыкающих к основаниям).*
- *Если у двух треугольников равны высоты, то их площади относятся как основания.*

Решение. При решении данной задачи неоднозначность в условии, как и в предыдущем примере, состоит в выборе варианта буквенного обозначения вершин трапеции и дополнительно к этому в выборе большего основания. Пусть точка E делит диагональ в отношении 1:3, считая от вершины верхнего основания.

1. Рассмотрим трапецию с основаниями BC и AD (см. рис. 35*а*). Треугольники BEC и AED подобны (по двум углам) с коэффициентом подобия $k = \dfrac{EC}{AE} = \dfrac{1}{3}$.

Значит, $\dfrac{S_{AED}}{S_{BEC}} = 3^2 = 9$. Отсюда $S_{BEC} = \dfrac{S_{AED}}{9} = 1$. Треугольники ABE и BEC имеют общую высоту, поэтому $\dfrac{S_{ABE}}{S_{BEC}} = \dfrac{AE}{EC} = 3$ и $S_{ABE} = 3 \cdot S_{BEC} = 3$. Аналогично $S_{DEC} = 3 \cdot S_{BEC} = 3$.

Следовательно, искомая площадь равна $S_{ABCD} = 1 + 3 + 3 + 9 = 16$.

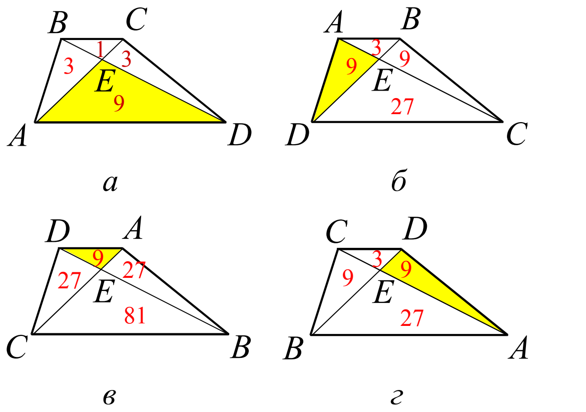


Рис. 35

2. В остальных случаях, решая аналогичным образом, получим

$S_{ABCD} = 3 + 9 + 9 + 27 = 48$ (см. рис. 35*б* и рис. 35*г*);

$S_{ABCD} = 9 + 27 + 27 + 81 = 144$ (см. рис. 35*в*).

Ответ: 16; 48; 144.

выбор линейного элемента

Пример 32. *Площадь треугольника ABC равна* 8. *MN – средняя линия. Найдите площадь треугольника CMN*.

- *Прямая, параллельная стороне треугольника и пересекающая две другие, отсекает от него треугольник, подобный данному.*

Решение. При решении данной задачи неоднозначность состоит в выборе средней линии. Рассмотрим три случая (см. рис. 36).

1. Отрезок MN параллелен отрезку BC (см. рис. 36*а*). Так как CN – медиана треугольника ABC, то

$$S_{ANC} = \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4.$$

MN – медиана треугольника AMC, поэтому

$$S_{CMN} = \frac{1}{2} S_{AMC} = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2.$$

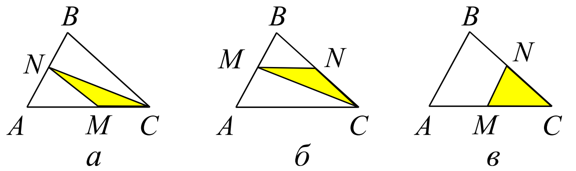


Рис. 36

2. Отрезок MN параллелен отрезку AC (см. рис. 36*б*). В этом случае решение аналогично предыдущему.

3. Отрезок MN параллелен отрезку AB (см. рис. 36*в*). Треугольники CMN и ABC подобны. Тогда

$$S_{CMN} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot S_{ABC} = \frac{1}{4}\cdot 8 = 2.$$

Ответ: 2.

выбор углового элемента

Пример 33. *Треугольник ABC вписан в окружность радиуса* 12. *Известно, что* $AB = 6$ *и* $BC = 4$. *Найдите AC.*

Решение. 1-*й способ*. Используя обобщенную теорему синусов, найдем

$$\sin A = \frac{BC}{2R} = \frac{4}{2\cdot 12} = \frac{1}{6},$$
$$\sin C = \frac{AB}{2R} = \frac{6}{2\cdot 12} = \frac{1}{4}.$$

Так как $\angle B = 180° - \angle A - \angle C$, то

$$\sin\angle B = \sin(180° - \angle A - \angle C) =$$
$$= \sin(\angle A + \angle C).$$

1. Если треугольник ABC – остроугольный, то

$$\cos\angle A = \frac{\sqrt{35}}{6},\ \cos\angle C = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Используя формулу синуса суммы, получим

$$\sin\angle B = \sin(\angle A + \angle C) =$$
$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{\sqrt{35}}{6}\cdot\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{35}+\sqrt{15}}{24}.$$

Тогда можем найти искомую величину

$$AC = 2R\sin B =$$
$$= 24\cdot\frac{\sqrt{35}+\sqrt{15}}{24} = \sqrt{35}+\sqrt{15}.$$

2. Пусть угол C – тупой, тогда

$$\sin\angle B = \sin(\angle A + \angle C) =$$
$$= \frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) + \frac{\sqrt{35}}{6}\cdot\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{35}-\sqrt{15}}{24}.$$

Отсюда $AC = \sqrt{35} - \sqrt{15}$.

3. Случай, когда угол A – тупой, невозможен.

2-*й способ*. Используем теорему косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cos B$ и следствие из теоремы синусов $AC = 2R\sin B$. Отсюда получаем тригонометрическое уравнение

$$576\sin^2 B = 36 + 16 - 48\cos B.$$

Решая последнее уравнение, находим $\cos B = \frac{1\pm 5\sqrt{21}}{24}$. Положительное значение косинуса соответствует острому углу B, отрицательное – тупому. Зная значение

$$\sin B = \frac{\sqrt{50\pm 10\sqrt{21}}}{24} = \frac{\sqrt{35}\pm\sqrt{15}}{24},$$

находим $AC = \sqrt{35}\pm\sqrt{15}$.

Ответ: $\sqrt{35}\pm\sqrt{15}$.

Пример 34. *Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что* $CH = AB$. *Найдите угол ACB.*

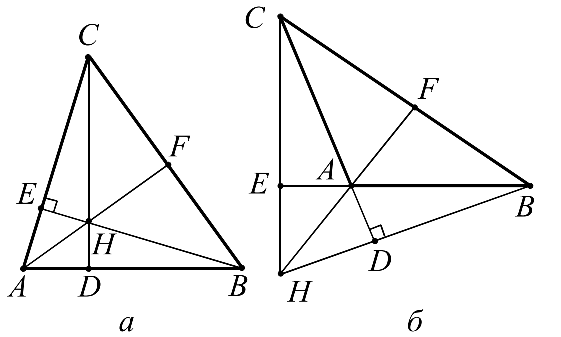


Рис. 37

Решение. 1. Пусть треугольник ABC – остроугольный (см. рис. 37*а*). Пусть BE и CD – высоты треугольника. Углы ABE и HCE равны, как углы с соответственно перпендикулярными сторонами. Треугольники AEB и HEC равны по гипотенузе ($CH = AB$) и острому углу. Отсюда $AE = EH$, и значит, $\angle EAH = \angle AHE = 45°$. В прямоугольном треугольнике ACF имеем $\angle CAF = 45°$, поэтому $\angle ACF = 45°$.

Остальные случаи рассмотрите самостоятельно.

2. Угол BAC – тупой (см. рис. 37*б*).

3. Угол ABC – тупой.

4. Угол ACB – тупой.
5. Угол ABC – прямой.
6. Угол BAC – прямой.
7. Случай, когда угол ACB – прямой, невозможен (почему?).

Ответ: $45°$ или $135°$.

Опорная задача. *Если H – ортоцентр треугольника, то радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC, ABH, BCH, ACH, равны между собой.*

Доказательство. Так как в четырехугольнике $AEHD$ углы E и D прямые (см. рис. 38*а*), то $\angle A + \angle DHE = 180°$. Отсюда получаем $\angle BHC = \angle DHE = 180° - \angle A$. Радиус окружности, описанной около треугольника BHC, равен

$$\frac{BC}{2\sin(180° - \angle A)} = \frac{BC}{2\sin\angle A} = \frac{a}{2\sin\alpha}.$$

Отсюда следует, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и BCH равны между собой. Аналогичное доказательство проводят и для других треугольников.

Пример 35. *Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что отрезок CH равен радиусу окружности, описанной около треугольника. Найдите угол ACB.*

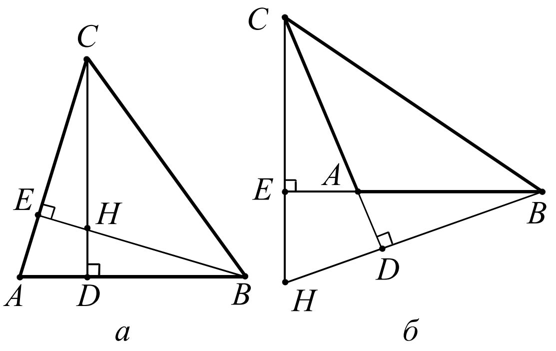


Рис. 38

Решение. Пусть R – радиус окружности, описанной около треугольника ABC. Так как радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и BCH равны между собой, то для треугольника BCH имеем

$$CH = 2R\sin\angle HBC$$

или

$$R = 2R\sin\angle HBC.$$

Отсюда $\sin\angle HBC = \frac{1}{2}$. Значит, $\angle HBC = 30°$ или $\angle HBC = 150°$.

1. Если треугольник ABC – остроугольный, то из треугольника BEC находим $\angle C = 90° - 30° = 60°$ (см. рис. 38*а*).

2. Если в треугольнике ABC угол A – тупой, то $\angle HBC = 30°$ (в треугольнике DBC угол D прямой, а угол DBC может быть только острым). Из треугольника DBC находим $\angle C = 90° - 30° = 60°$ (см. рис. 38*б*).

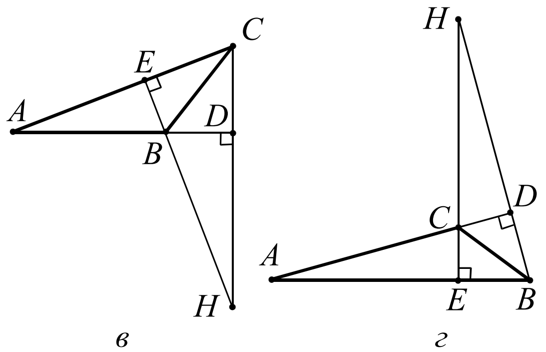


Рис. 38

3. Если в треугольнике ABC угол B – тупой, то $\angle HBC = 150°$ (почему этот угол тупой?) и $\angle CBE = 30°$. Из треугольника CBE (см. рис. 38*в*) находим $\angle C = 90° - 30° = 60°$.

4. Если в треугольнике ABC угол C – тупой (см. рис. 38*г*), то $\angle HBC = 30°$ (почему этот угол острый?). Из треугольника CBD находим $\angle BCD = 90° - 30° = 60°$. Тогда $\angle ACB = 180° - 60° = 120°$.

Ответ: $60°$ или $120°$.

Опорная задача. *Пусть в треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Тогда треугольник A_1BC_1 подобен данному с коэффициентом подобия, равным $|\cos B|$.*

Доказательство. Рассмотрим остроугольный треугольник (см. рис. 39*а*). Для прямоугольных треугольников BA_1A и BC_1C имеем $\frac{BA_1}{AB} = \cos B$ и $\frac{BC_1}{BC} = \cos B$ соответственно. Следовательно треугольники BA_1C_1 и BAC подобны (второй признак), так как имеют общий угол B и $\frac{BA_1}{AB}=\frac{BC_1}{BC}=\cos B$.

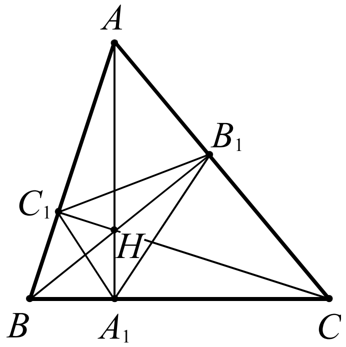


Рис. 39*а*

Случай тупого угла B рассмотрите самостоятельно

Пример 36. *Точки* A_1, B_1, C_1 *– основания высот треугольника ABC. Углы треугольника* $A_1B_1C_1$ *равны* 90°, 60° *и* 30°. *Найдите углы треугольника ABC.*

Решение. 1. Треугольник ABC – остроугольный (см. рис. 39*а*).

Так как треугольник BC_1A_1 подобен треугольнику ABC, то $\angle BC_1A_1 = \angle BCA$. Аналогично из подобия треугольников AB_1C_1 и ABC имеем $\angle AC_1B_1 = \angle BCA$. Далее развернутый угол при вершине C_1 составлен из суммы углов BC_1A_1, AC_1B_1 и $B_1C_1A_1$. Отсюда получаем соотношение $2\angle C + \angle B_1C_1A_1 = 180°$ или $\angle C = 90° - \frac{1}{2}\angle B_1C_1A_1$.

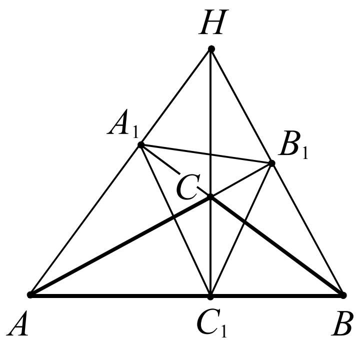


Рис. 39*б*

Такие же равенства можно получить для других острых углов. Используем данные углы: $90° - \frac{1}{2}\cdot 90° = 45°$, $90° - \frac{1}{2}\cdot 60° = 60°$, $90° - \frac{1}{2}\cdot 30° = 75°$.

Остальные случаи рассмотрите самостоятельно.

2. Угол ACB – тупой (см. рис. 39*б*).
3. Угол ABC – тупой.
4. Угол BAC – тупой.

Случаи, когда один из углов ABC, BAC, ACB – прямой, невозможны (почему?).

Замечание. Другое решение может быть основано на следующей опорной задаче:

- *Высоты остроугольного треугольника являются биссектрисами его ортотреугольника (треугольник, образованный основаниями высот).* (докажите)

Ответ: 45°, 75°, 60° или 135°, 15°, 30° или 120°, 15°, 45° или 105°, 30°, 45°.

выбор кругового элемента (дуги)

Рассмотрим задачу, в которой имеются две точки, делящие окружность на две дуги, но не указано, какой из этих двух дуг касается другая окружность.

Пример 37. *Окружности с центрами O и B радиуса OB пересекаются в точке C. Радиус OA окружности с центром O перпендикулярен OB, причем точки A и C лежат по одну сторону от прямой OB. Окружность* S_1 *касается меньших дуг AB и OC этих окружностей, а также прямой OA, а окружность* S_2 *касается окружности с центром B, прямой OA и окружности* S_1. *Найдите отношение радиуса окружности* S_1 *к радиусу окружности* S_2.

Решение. Так как окружность S_1 радиуса a и окружность с центром в точке B и радиуса R касаются друг друга и общей прямой OA, то имеем $OI = 2\sqrt{Ra}$ (расстояние между точками касания окружностей общей касательной), $OK = R - a$.

Далее используем теорему Пифагора в треугольнике OKI:

$$(R-a)^2 = a^2 + \left(2\sqrt{Ra}\right)^2.$$

Отсюда получаем $R = 6a$.

Рассмотрим первый случай касания окружности S_2 радиуса b (см. рис. 40*a*).

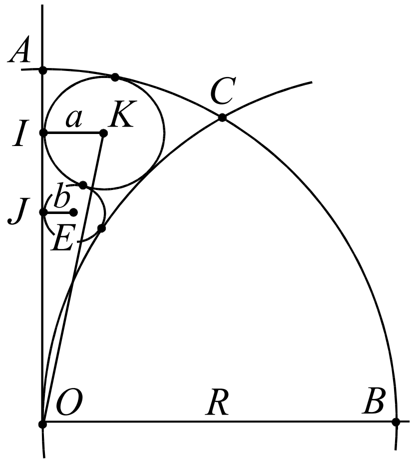


Рис. 40*а*

Тогда $OI = OJ + JI$, или

$$2\sqrt{aR} = 2\sqrt{bR} + 2\sqrt{ab},$$

откуда $\sqrt{6a^2} = \sqrt{6ab} + \sqrt{ab}$,

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{6}},\ \frac{a}{b} = \frac{7+2\sqrt{6}}{6}.$$

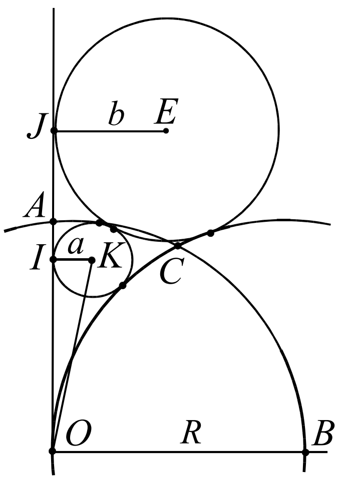


Рис. 40*б*

Для второго случая (см. рис. 40*б*) имеем $OJ = OI + IJ$,

$$2\sqrt{bR} = 2\sqrt{aR} + 2\sqrt{ab}.$$

Проводя вычисления аналогично предыдущему случаю, получим

$$\frac{a}{b} = \frac{7-2\sqrt{6}}{6}.$$

Ответ: $\dfrac{7 \pm 2\sqrt{6}}{6}$.

выбор плоской фигуры

Пример 38. *Основания трапеции равны a и b. Прямая, параллельная основаниям, разбивает трапецию на две трапеции, площади которых относятся как* $2:3$. *Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного внутри трапеции.*

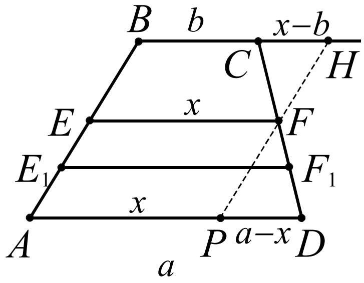


Рис. 41

Решение. 1*-й способ*. Обозначим искомый отрезок EF через x (см. рис. 41).

1. Пусть площади трапеций $BCFE$ и $AEFD$ относятся как $2:3$:

$$\frac{S_{BCFE}}{S_{AEFD}} = \frac{\frac{b+x}{2}\cdot h_1}{\frac{a+x}{2}\cdot h_2} = \frac{2}{3}.$$

Отсюда $\dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{2(a+x)}{3(b+x)}$, $(*)$

где h_1 и h_2 – высоты этих трапеций.

Через точку F проведем отрезок PH параллельно AB. Тогда треугольники PFD и CHF подобны (докажите) и

$$\frac{CH}{BP} = \frac{h_1}{h_2},\ \frac{x-b}{a-x} = \frac{h_1}{h_2}.$$

Используем соотношение $(*)$:

$$\frac{x-b}{a-x} = \frac{2(a+x)}{3(b+x)}.$$

Решая полученное уравнение относительно переменной x, получаем

$$3\left(x^2-b^2\right) = 2\left(a^2-x^2\right),$$
$$5x^2 = 2a^2 + 3b^2,$$
$$x = \sqrt{\frac{2a^2+3b^2}{5}}.$$

2-*й способ*. Обозначим $S_{BCFE}=S_1$, $S_{AEFD}=S_2$, тогда $S_2=1{,}5S_1$.

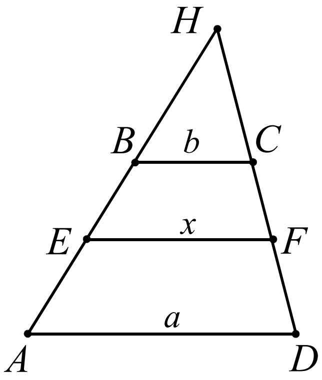


Рис. 42

Достроим трапецию $ABCD$ до треугольника AHD (см. рис. 42) и обозначим $S_{BHC}=S$.

Так как треугольники AHD и BHC подобны (докажите), то имеем

$$\frac{S_{EHF}}{S_{BHC}}=\left(\frac{x}{b}\right)^2 \text{ или } \frac{S+S_1+S_2}{S}=\frac{a^2}{b^2}. \quad (*)$$

Так как треугольники EHF и AHD подобны (докажите), то имеем

$$\frac{S_{EHF}}{S_{AHD}}=\left(\frac{x}{b}\right)^2 \text{ или } \frac{S+S_1}{S}=\frac{x^2}{b^2}. \quad (**)$$

Из соотношений (*) и (**) имеем

$$1+\frac{S_1+S_2}{S}=\frac{a^2}{b^2} \text{ и } 1+\frac{S_1}{S}=\frac{x^2}{b^2}.$$

Далее $\dfrac{S_1+S_2}{S}=\dfrac{a^2-b^2}{b^2}$ и $\dfrac{S_1}{S}=\dfrac{x^2-b^2}{b^2}$.

Разделив одно равенство на другое, получим $\dfrac{S_1+S_2}{S_1}=\dfrac{a^2-b^2}{x^2-b^2}$.

С учетом соотношения $S_2=1{,}5S_1$ имеем уравнение относительно переменной x: $\dfrac{a^2-b^2}{x^2-b^2}=\dfrac{5}{2}$, откуда $x=\sqrt{\dfrac{2a^2+3b^2}{5}}$.

2. Случай, когда площади трапеций $AEFD$ и $BCFE$ относятся как $2:3$, рассмотрите самостоятельно. В этом случае площади трапеций $BCFE$ и $AEFD$ относятся как $3:2$.

Ответ: $\sqrt{\dfrac{2a^2+3b^2}{5}}$ или $\sqrt{\dfrac{3a^2+2b^2}{5}}$.

5. Соответствие между множеством фигур и множеством их свойств

В задачах этого типа фигурируют объекты, которым приписываются определенные свойства, но не указан порядок соответствия между множеством объектов и множеством их свойств.

неопределенность между значением синуса (косинуса) угла и видом угла

Пример 39. *Площадь треугольника равна* 12. *Две его стороны равны* 6 *и* 8. *Найдите угол между этими сторонами.*

Решение. Используя формулу $S_\Delta=\dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$, получаем $\sin\gamma=\dfrac{1}{2}$. Значит $\gamma=30^\circ$ или $\gamma=150^\circ$.

Ответ: 30° или 150°.

Пример 40. *Радиус окружности равен* 1. *Найдите величину вписанного угла, опирающегося на хорду, равную* $\sqrt{2}$. *Ответ дайте в градусах.*

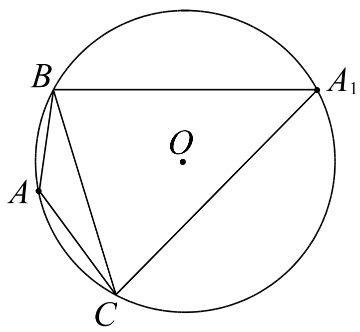


Рис. 43

Решение. Хорда BC разбивает окружность на две дуги. Все вписанные углы, опирающиеся на эту хорду, с вершинами, лежащими на одной дуге, будут равны. Для любой точки A (см. рис. 43), используя формулу $\sin A=\dfrac{a}{2R}$, где $a=\sqrt{2}$ и $R=1$, получим $\sin A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Значит $\angle A_1=45^\circ$ или $\angle A=135^\circ$.

Ответ: 45° или 135°.

Пример 41. *Около треугольника ABC описана окружность с центром O, угол AOC равен* 60°. *В треугольник ABC вписана окружность с центром M. Найдите угол AMC.*

Решение. В равнобедренном треугольнике AOC ($OC = OA = R$) угол при вершине равен $60°$. Следовательно, треугольник AOC – равносторонний и $AC = R$.

Используя следствие обобщенной теоремы синусов, получаем

$AC = 2R\sin B$, $R = 2R\sin B$, $\sin B = \frac{1}{2}$.

Отсюда $\angle B = 30°$ или $\angle B = 150°$.

1. Пусть $\angle B = 30°$ (см. рис. 44), тогда $\angle A + \angle C = 150°$. Центр вписанной окружности M, лежит на пересечении биссектрис треугольника, значит $\angle MAC + \angle MCA = 150° : 2 = 75°$. Тогда $\angle AMC = 180° - 75° = 105°$.

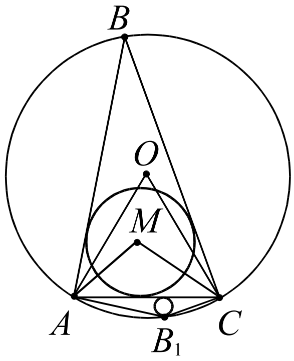


Рис. 44

2. Случай, когда $\angle B_1 = 150°$ (см. рис. 44), рассмотрите самостоятельно.

***Ответ*:** $165°$ или $105°$.

Пример 42. *Медиана BM треугольника ABC равна его высоте AH. Найдите угол MBC.*

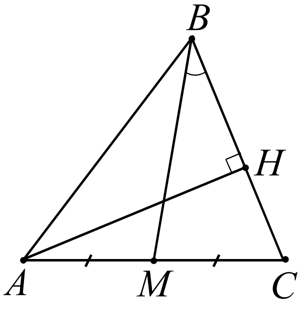


Рис. 45*а*

Решение. Пусть $\angle MBC = \alpha$. Найдем площадь треугольника ABC двумя способами. Так как медиана BM треугольника ABC разбивает его на два равновеликих треугольника, то

$$S_{ABC} = 2S_{CBM} = 2\cdot\frac{1}{2}BC\cdot BM\sin\alpha = \\ = BC\cdot BM\sin\alpha.$$

С другой стороны, $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC\cdot AH$. Учитывая, что $AH = BM$, приравняем площади $BC\cdot BM\sin\alpha = \frac{1}{2}BC\cdot AH$. Получаем, что $\sin\alpha = 0{,}5$. Отсюда $\alpha = 30°$ (см. рис. 45*а*) или $\alpha = 150°$ (см. рис. 45*б*).

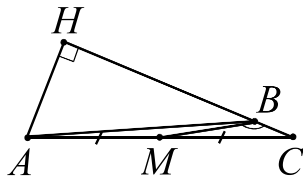


Рис. 45*б*

***Ответ*:** $30°$ или $150°$.

Пример 43. *Трапеция ABCD с основаниями AD и BC вписана в окружность с центром O. Найдите высоту трапеции, если ее средняя линия равна 3 и* $\sin\angle AOB = \frac{3}{5}$.

- *Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на большее основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали — полусумме оснований (средней линии).* (докажите)
- *Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.*

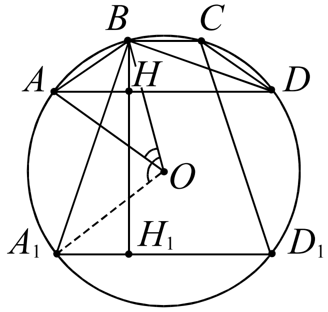


Рис. 46

Решение. Пусть $\angle AOB = \alpha$ (см. рис. 46). Проведем высоту BH и диагональ BD. Отрезок HD равен средней линии. Так как вписанный угол BDA в два раза меньше центрального угла AOB, то $\angle ADB = \frac{\alpha}{2}$. Из прямоугольного треугольника BHD найдем высоту $BH = HD\cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Используем формулу тангенса половинного угла $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$. Тогда $BH = \frac{3\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

1. Рассмотрим случай, когда $\angle AOB = \alpha$ – острый. Находим

$$\cos\alpha = \frac{4}{5} \text{ и } BH = \frac{3\cdot\frac{3}{5}}{1+\frac{4}{5}} = 1.$$

2. Второй случай, когда $\angle AOB = \alpha$ – тупой, рассмотрите самостоятельно.

3. Что будет в случае, когда $\angle AOB = 90°$?

Ответ: 9 или 1.

Опорная задача. *Пусть O – центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Докажите равенства*:

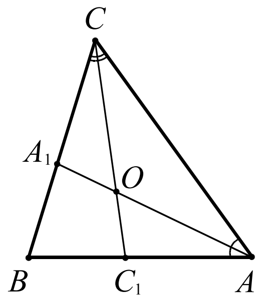


Рис. 47

$$\angle AOC = \frac{\angle B}{2} + 90°;$$
$$\angle AOB = \frac{\angle C}{2} + 90°;$$
$$\angle COB = \frac{\angle A}{2} + 90°.$$

Доказательство. Докажем первое соотношение. Из треугольника AOC имеем $\angle CAA = \frac{\angle A}{2}$ и $\angle ACO = \frac{\angle C}{2}$. Тогда $\angle AOC = 180° - \left(\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle C}{2}\right) = 180° - \frac{\angle A + \angle C}{2} = 180° - \frac{180° - \angle B}{2} = \frac{\angle B}{2} + 90°$.

Остальные равенства доказывают аналогично.

Пример 44. *В треугольнике ABC проведены высоты BM и CN, O – центр вписанной окружности. Известно, что* $BC = 24$, $MN = 12$. *Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BOC.*

Решение. 1. Треугольник AMN подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $k = \frac{MN}{BC} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} = |\cos A|$. Отсюда $\angle A = 60°$ или $\angle A = 120°$.

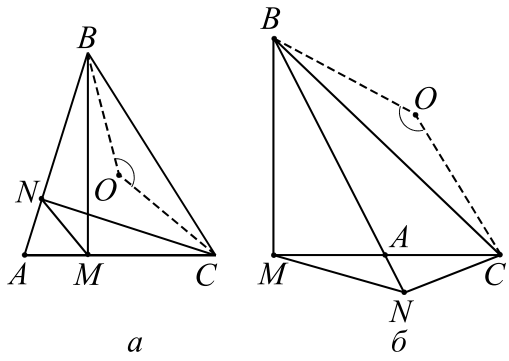


Рис. 48

Используем соотношение $\angle COB = \frac{\angle A}{2} + 90°$ (см. опорную задачу). Значит $\sin\angle COB = \sin\left(\frac{60°}{2} + 90°\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (см. рис. 48*а*) или $\sin\angle COB = \sin\left(\frac{120°}{2} + 90°\right) = \frac{1}{2}$ (см. рис. 48*б*).

Используем следствие из обобщенной теоремы синусов:

$$R = \frac{BC}{2\sin\angle COB}.$$

Отсюда получаем

$$R = \frac{24}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3} \text{ или } R = \frac{24}{1} = 24.$$

Ответ: $8\sqrt{3}$ или 24.

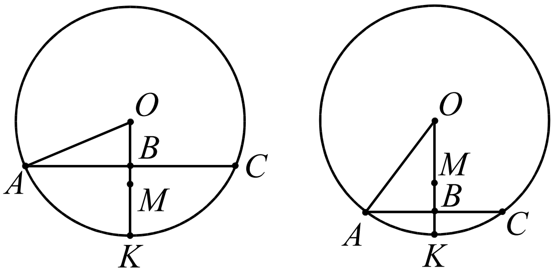
интерпретация алгебраического решения

Пример 45. *Дана окружность радиуса 13. Точка M – середина радиуса OK. Хорда AC перпендикулярна радиусу OK. Найти расстояние BM, если известно, что* $AB - BK = 4$ *(рис. 49).*

Решение. Обозначим BM через x (см. рис. 49*а*), тогда имеем $OB = 6{,}5 - x$ и $AB = \sqrt{169-(6{,}5-x)^2}$, $BK = 6{,}5 + x$. Используя теорему Пифагора для треугольника AOB, получаем уравнение

$$\sqrt{169-(6{,}5-x)^2} = 10{,}5 + x.$$

Отсюда находим корни $x_1 = 1{,}5$ и $x_2 = -5{,}5$.



а *б*

Рис. 49

Интерпретируем отрицательный корень: точка B расположена между точками M и K, то есть отрезок MB откладывается в противоположном направлении (см. рис. 49*б*). Оба корня удовлетворяют решению задачи.

Ответ: 1,5 или 5,5.

Пример 46. *Дана трапеция ABCD с боковыми сторонами* $AB = 36$, $CD = 34$ *и верхним основанием* $BC = 10$. *Известно, что* $\cos\angle ABC = -\frac{1}{3}$. *Найдите BD.*

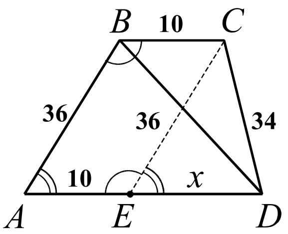


Рис. 50*а*

Решение. Проведем CE параллельно AB (см. рис. 50*а*). Тогда $ABCE$ – параллелограмм. $\angle AEC = \angle ABC$, $\angle DEC = 180° - \angle AEC$, $\cos\angle DEC = \frac{1}{3}$ и $\cos\angle DAB = \frac{1}{3}$.

Обозначим ED через x. Воспользуемся теоремой косинусов для угла DEC в треугольнике DEC:

$$34^2 = 36^2 + x^2 - 2\cdot 36\cdot x\cdot\frac{1}{3},$$

$$x^2 - 24x + 140 = 0.$$

Отсюда $x = 14$ или $x = 10$.

Получившиеся два значения x, означают, что условию задачи соответствуют два чертежа. В одном случае $\angle CDE$ острый, в другом – тупой.

Воспользуемся теоремой косинусов для угла DAB в треугольнике ABD и рассмотрим два случая.

1. Пусть $x = 14$, тогда $AD = 24$.

$$BD^2 = 36^2 + 24^2 - 2\cdot 36\cdot 24\cdot\frac{1}{3} = 1296;$$

$BD = 36$.

В этом случае угол D – острый (см. рис. 50*а*), так как справедливо неравенство: $EC^2 - ED^2 - CD^2 = 36^2 - 14^2 - 34^2 = -56 < 0$.

2. Пусть $x = 10$, тогда $AD = 20$,

$$BD^2 = 36^2 + 20^2 - 2\cdot 36\cdot 20\cdot\frac{1}{3} = 1216;$$

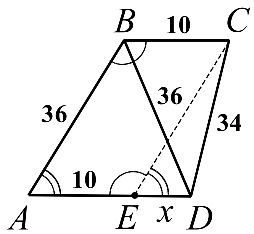


Рис. 50*б*

$BD = 8\sqrt{19}$. Покажите, что в этом случае угол D – тупой (см. рис. 50*б*).

Ответ: 36 или $8\sqrt{19}$.

задачи с параметрами

В геометрических задачах в качестве параметра может быть линейная или угловая величина. Количество возможных решений находится в зависимости от условия задачи и области изменения параметра.

Пример 47. *Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине B и углом* α *при вершине A. Точка D – середина гипотенузы. Точка* C_1 *симметрична точке C относительно прямой BD. Найдите угол* AC_1B.

- *Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы.*

Решение. Так как прямая BD является серединным перпендикуляром к отрезку CC_1, то $DC = DC_1$. С другой стороны, точка D – центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника. Поэтому $DC = DB = DA$. Отсюда следует, что точка C_1 принадлежит описанной окружности.

Построение чертежа к этой задаче зависит от того, каково значение параметра α. Возможны три случая: 1) $\alpha = 45°$; 2) $45° < \alpha < 90°$; 3) $0° < \alpha < 45°$.

1. Если $\alpha = 45°$, то центральный угол $\angle BDC = 2 \cdot \angle BAC = 90°$. В этом случае ось BD перпендикулярна гипотенузе AC. Точка C отобразится в точку A, и угол AC_1B не будет определен.

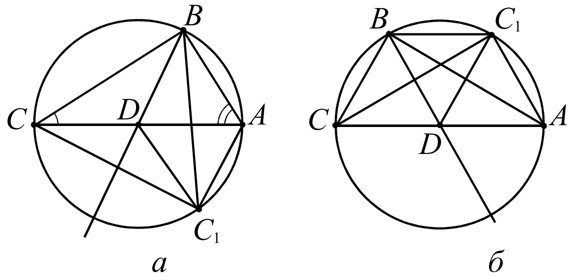


Рис. 51

2. Пусть $\alpha > 45°$, тогда центральный угол $\angle BDC = 2\alpha > 90°$ (см. рис. 51*а*). В этом случае точки C и C_1 расположены по одну сторону от хорды AB. В прямоугольном треугольнике $\angle BCA = 90° - \alpha$.

Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны. Поэтому $\angle AC_1B = \angle BCA = 90° - \alpha$.

3. Пусть $\alpha < 45°$, тогда центральный угол $\angle BDC < 90°$ (см. рис. 51*б*). В этом случае точки C и C_1 расположены по разные стороны от хорды AB. Четырехугольник AC_1BC вписан в окружность, поэтому $\angle AC_1B = 180° - \angle BCA = 180° - (90° - \alpha) = 90° + \alpha$.

Ответ: $90° + \alpha$, если $0° < \alpha < 45°$;
$90° - \alpha$, если $45° < \alpha < 90°$;
при $\alpha = 45°$ точка C_1 совпадает с точкой A и угол не определен.

Пример 48. *Периметр равнобедренного треугольника равен P, одна из его сторон равна a. Найдите вторую сторону треугольника.*

Решение. Если основание треугольника равно a, то боковая сторона равна $\frac{P-a}{2}$. Используя неравенство треугольника, получаем систему

$$\begin{cases} a < \dfrac{P-a}{2} + \dfrac{P-a}{2} \\ \dfrac{P-a}{2} < \dfrac{P-a}{2} + a \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a < \dfrac{P}{2} \\ a > 0 \end{cases}$$

Пусть боковая сторона треугольника равна a, тогда основание равно $P - 2a$. Запишем условия

$$\begin{cases} P - 2a < a + a \\ a < P - 2a + a \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a > \dfrac{P}{4} \\ a < \dfrac{P}{2} \end{cases}$$

Ответ: если $\frac{P}{4} < a < \frac{P}{2}$, то одно решение a, $\frac{P-a}{2}$, $\frac{P-a}{2}$;
если $\frac{P}{4} < a < \frac{P}{2}$, то два решения a, a, $P - 2a$ или a, $\frac{P-a}{2}$, $\frac{P-a}{2}$;
при $a \le 0$ или при $a \ge \frac{P}{2}$ решений нет.

Пример 49. *В параллелограмме ABCD известны стороны* $AB = a$, $BC = b$, *и* $\angle BAD = \alpha$. *Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BCD и DAB.*

Решение. Диагональ BD разбивает параллелограмм на два равных треугольника BCD и DAB. Поэтому по разные стороны от прямой BD расположены центры O и O_1 описанных около них окружностей, лежащие на серединном перпендикуляре OO_1 к их общей стороне BD. Следовательно, $OO_1 = 2OM$, где точка M – середина BD. Рассмотрим следующие случаи.

1. Если $\alpha < 90°$, то центр O лежит внутри треугольника DAB (см. рис. 52*а*).

Тогда получаем $\angle BOD = 2\alpha$, $\angle BOM = \frac{1}{2}\angle BOD = \alpha$. Из треугольника BOM находим $OM = BM \cdot \mathrm{ctg}\alpha$. Тогда $OO_1 = 2OM = 2BM \cdot \mathrm{ctg}\alpha = BD \cdot \mathrm{ctg}\alpha$.

BD находим из треугольника DAB: $BD = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$.

Следовательно,
$OO_1 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \cdot \mathrm{ctg}\alpha$.

2. Пусть $\alpha = 90°$, тогда точки O и O_1 совпадают и $OO_1 = 0$ (см. рис. 52*б*).

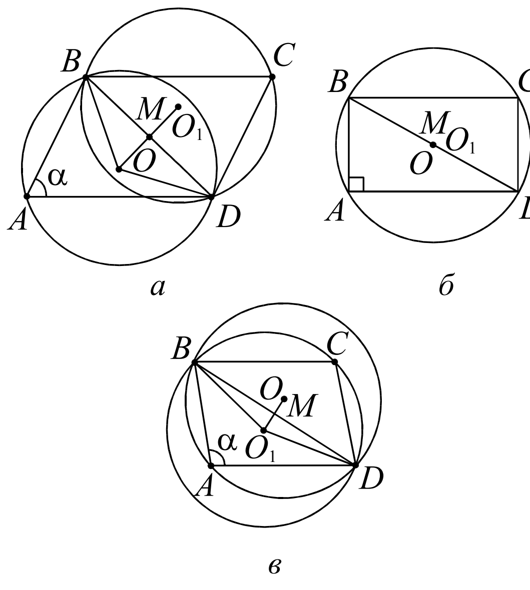


Рис. 52

3. Пусть $\alpha > 90^\circ$ тогда центр O лежит вне треугольника DAB (рис. 51*в*). Получаем угол, опирающийся на большую дугу $\angle BOD = 2\alpha$, а в треугольнике BOD

$\angle BOD = 360^\circ - 2\alpha$, $\angle BOM = \dfrac{1}{2}\angle BOD =$ $= 180^\circ - \alpha$ Из треугольника BOM находим

$$OM = BM \cdot \mathrm{ctg}(180^\circ - \alpha) = BM \cdot (-\mathrm{ctg}\alpha).$$

Тогда $OO_1 = 2OM = 2BM \cdot (-\mathrm{ctg}\alpha) =$ $= BD \cdot (-\mathrm{ctg}\alpha)$.

BD находим из треугольника DAB:

$$BD = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}.$$

Следовательно,

$$OO_1 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \cdot (-\mathrm{ctg}\alpha).$$

Ответ: $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \cdot \mathrm{ctg}\alpha$, если $0 < \alpha < 90^\circ$; 0, если $\alpha = 90^\circ$; $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \cdot (-\mathrm{ctg}\alpha)$, если $90^\circ < \alpha < 180^\circ$; в общем виде $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \cdot |\mathrm{ctg}\alpha|$.

Следует отметить, что приведенная классификация не претендует на отражение в полном объеме всего многообразия подобных задач, но включают в себя большую часть, с которой придется столкнуться школьнику при подготовке к экзамену.

Упражнения

1. Биссектрисы углов B и C параллелограмма пересекаются в точке O. Найдите площадь параллелограмма, если $\angle A = 2\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{13}}$, $OA = 2\sqrt{10}$, $OD = 5$.

Ответ: 24 или 72.

2. Боковая сторона неравнобедренной трапеции равна 12 и образует с ее основанием угол 60°. Основания трапеции равны 16 и 40. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований.

Ответ: 12 или $6\sqrt{13}$.

3. Радиус описанной около равнобедренного треугольника окружности равен 25, а вписанной в него окружности – 12. Найдите стороны треугольника.

Ответ: $8\sqrt{21}$, $10\sqrt{21}$, $10\sqrt{21}$ или 48, 40, 40.

4. Диагональ равнобедренной трапеции равна 5, а площадь равна 12. Найдите высоту трапеции.

Ответ: 3 или 4.

5. К окружности, вписанной в треугольник с периметром 18, проведена касательная параллельно основанию треугольника. Отрезок касательной между боковыми сторонами равен 2. Найдите основание треугольника.

Ответ: 3 или 6.

6. Найдите радиус окружности, касающейся двух концентрических окружностей радиусов 3 и 5.

Ответ: 1 или 4.

7. Точка M делит среднюю линию треугольника ABC, параллельную стороне BC, на отрезки, один из которых в три раза длиннее другого. Точка N также делит сторону BC на отрезки, один из которых в три раза длиннее другого. В каком отношении прямая MN делит площадь треугольника ABC?

Ответ: $\dfrac{1}{3}$ или $\dfrac{9}{11}$.

8. Через середину боковой стороны равнобедренного треугольника со сторонами 12, 18, 18 проведена прямая, разбивающая треугольник на части, площади которых относятся как 1:2. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного внутри треугольника.

Ответ: $\sqrt{97}$ или $\sqrt{57}$.

9. В треугольник ABC со сторонами $AB = 18$ и $BC = 12$ вписан параллелограмм $BKLM$, причем точки K, L, M лежат на сторонах AB, AC и BC соответственно. Известно, что площадь параллелограмма составляет $\frac{4}{9}$ площади треугольника ABC. Найдите стороны параллелограмма.

Ответ: 6; 8 или 4; 12.

10. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что отрезок CH равен радиусу окружности, описанной около треугольника. Найдите угол ACB.

Ответ: $60°$ или $120°$.

11. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что $CH = AB$. Найдите угол ACB.

Ответ: $45°$ или $135°$.

12. В треугольнике ABC проведены высоты BM и CN, O – центр вписанной окружности. Известно, что $BC = 24$, $MN = 12$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BOC.

Ответ: $8\sqrt{3}$ или 24.

13. Окружность описана около равностороннего треугольника ABC. На дуге BC, не содержащей точку A, расположена точка M, делящая градусную меру этой дуги в отношении $1:2$. Найдите углы треугольника AMB.

Ответ: $40°$; $80°$; $60°$ или $60°$; $20°$; $100°$.

14. Треугольник ABC равнобедренный. Радиус OA описанного круга образует с основанием AC угол OAC, равный $20°$. Найдите угол BAC.

Ответ: $35°$ или $55°$.

15. Пусть AB и AC – равные хорды, MAN – касательная, градусная мера дуги BC, не содержащей точки A, равна $200°$. Найдите углы MAB и NAC.

Ответ: $\angle MAB = \angle NAC = 40°$ или $\angle MAB = \angle NAC = 140°$.

16. Через точку M проведены две прямые. Одна из них касается некоторой окружности в точке A, а вторая пересекает эту окружность в точках B и C, причем $BC = 7$ и $BM = 9$. Найдите AM.

Ответ: 12 или $3\sqrt{2}$.

17. Пусть O – центр окружности, описанной около треугольника ABC, $\angle AOC = 60°$. Найдите угол AMC, где M – центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

Ответ: $165°$ или $105°$.

18. Точка B – середина отрезка AC, причем $AC = 6$. Проведены три окружности радиуса 5 с центрами A, B и C. Найдите радиус четвертой окружности, касающейся всех трех данных.

Ответ: $\frac{9}{20}$ или $\frac{9}{10}$.

19. Одна окружность описана около равностороннего треугольника ABC, а вторая вписана в угол A и касается первой окружности. Найдите отношение радиусов окружностей.

Ответ: $3:2$ или $1:2$.

20. Один из смежных углов с вершиной A вдвое больше другого. В эти углы вписаны окружности с центрами O_1 и O_2. Найдите углы треугольника O_1AO_2, если отношение радиусов окружностей равно $\sqrt{3}$.

Ответ: $90°$; $45°$; $45°$ или $90°$; $\mathrm{arctg}3$; $\mathrm{arcctg}3$.

21. В прямоугольном треугольнике ABC катет AC равен 16 и катет BC равен 12. Из центра B радиусом BC описана окружность и к ней проведена касательная, параллельная гипотенузе. Катет BC продолжен до пересечения с проведенной касательной. Определите, на какое расстояние продолжен катет.

Ответ: 15 или 3.

22. Дана трапеция $ABCD$, диагонали AC и BD которой пересекаются под прямым углом, а продолжения боковых сторон AB и DC пересекаются в точке K под углом $30°$. Известно, что $\angle BAC = \angle CDB$, а площадь трапеции равна S. Найдите площадь треугольника AKD.

Ответ: $\frac{3S}{2}$ или $\frac{S}{2}$.

23. Дана трапеция $ABCD$ с боковыми сторонами $AB = 27$, $CD = 28$ и основанием

$BC = 5$. Известно, что $\cos\angle BCD = -\frac{2}{7}$. Найдите диагональ *AC*.

Ответ: 28 или $2\sqrt{181}$.

24. Площадь равнобедренной трапеции равна $\sqrt{3}$. Угол между диагональю и основанием на $20°$ больше угла между диагональю и боковой стороной. Найдите острый угол трапеции, если ее диагональ равна 2.

Ответ: $40°$ или $80°$.

25. Известно, что высота трапеции равна 15, а диагонали трапеции равны 17 и 113. Чему равна ее площадь?

Ответ: 900 или 780.

26. Дан параллелограмм со сторонами 1 и 2 и острым углом $60°$. На двух его противоположных сторонах как на основаниях построены вне параллелограмма равнобедренные треугольники с углами $120°$ при вершинах. Найдите расстояние между этими вершинами.

Ответ: $\sqrt{\frac{13}{3}}$ или $\sqrt{\frac{19}{3}}$.

27. В треугольнике *ABC* $AB = 7$, $BC = 9$, $CA = 4$. Точка *D* лежит на прямой *BC* так, что $BD : DC = 1 : 5$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников *ADC* и *ADB*, касаются стороны *AD* в точках *E* и *F*. Найдите длину отрезка *EF*.

Ответ: 4,5 или 6.

28. Площадь равнобедренного треугольника *ABC* ($AB = BC$) равна 36. Найдите длину стороны *AC*, если $BC = \sqrt{97}$.

Ответ: 8 или 18.

29. Катеты прямоугольного треугольника равны 7 и 24. Найдите гипотенузу треугольника, подобного данному, если один из катетов равен 10.

Ответ: $\frac{125}{12}$ или $\frac{250}{7}$.

30. Касательная, проведенная через вершину *M* вписанного в окружность треугольника *KLM*, пересекает продолжение стороны *KL* за вершину *L* в точке *N*. Известно, что радиус окружности равен 2, $KM = \sqrt{8}$ и $\angle MNK + \angle KML = 4\angle LKM$. Найдите длину касательной *MN*.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{\sin 15°} = 2(\sqrt{3}+1)$ или $\frac{\sqrt{2}}{\sin 105°} = 2(\sqrt{3}-1)$.

31. Касательная, проведенная через вершину *C* вписанного в окружность треугольника *ABC*, пересекает продолжение стороны *AB* за вершину *B* в точке *D*. Известно, что радиус окружности равен 2, $AC = \sqrt{2}$ и $\angle CDA + \angle ACB = 2\angle BAC$. Найдите длину секущей *AD*.

Ответ: $\frac{3}{\sin 15°} = 3(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ или $\frac{3}{\sin 75°} = 3(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

32. В треугольнике *ABC* перпендикуляр, проходящий через середину стороны *AC*, пересекает сторону *BC* в точке *M*, а перпендикуляр, проходящий через сторону *BC*, пересекает сторону *AC* в точке *N*. Прямая *MN* перпендикулярна *AB* и $MN = \frac{1}{\sqrt{3}}AB$. Найдите углы треугольника *ABC*.

Ответ: $\angle A = 120°$, $\angle B = 30°$, $\angle C = 30°$ или $\angle A = 30°$, $\angle B = 120°$, $\angle C = 30°$.

33. Найдите углы равнобедренного треугольника, если известно, что угол между биссектрисой, проведенной к основанию, и биссектрисой, проведенной к боковой стороне, равен углу при вершине.

Ответ: $36°$, $36°$, $108°$ или $60°$, $60°$, $60°$.

34. Найдите градусную меру дуги, если перпендикуляр, проведенный к хорде из ее конца, делит дополнительную (до окружности) дугу в отношении $5 : 2$.

Ответ: $108°$, $85°$, $45°$.

35. *AB* и *AC* – равные хорды, *MAN* – касательная, угловая величина дуги *BC*, не содержащей точки *A*, равна $200°$. Найдите углы *MAB* и *NAC*.

Ответ: $\angle MAB = \angle NAC = 40°$ или $\angle MAB = \angle NAC = 140°$.

36. В треугольнике *ABC* перпендикуляр, проходящий через середину стороны *AB*, пересекает прямую *AC* в точке *M*, а перпендикуляр, проходящий через середину стороны *AC*, пересекает прямую *AB* в точке N. Известно, что $MN = BC$ и прямая MN перпендикулярна прямой BC. Определите углы треугольника ABC.

Ответ: $\angle A = 60°$, $\angle B = 15°$, $\angle C = 105°$ или $\angle A = 60°$, $\angle B = 105°$, $\angle C = 15°$.

37. Площадь трапеции $ABCD$ равна S, отношение оснований $AD : BC = 3$; на прямой, пересекающей продолжение основания AD за точку D, расположен отрезок EF так, что $AE \| DF$, $BE \| CF$ и $AE : DF = CF : BE = 2$. Определить площадь треугольника EFD.

Ответ: $\frac{S}{12}$ или $\frac{9S}{20}$.

38. В треугольнике ABC с углом $\angle ABC = 60°$, биссектриса угла A пересекает BC в точке M. На стороне AC взята точка K так, что $\angle AMK = 30°$. Найдите $\angle OKC$, где O – центр окружности, описанной около треугольника AMC.

Ответ: $30°$ или $150°$.

39. Отрезок H_1H_2, соединяющий основания H_1 и H_2 высот AH_1 и BH_2 треугольника ABC, виден из середины M стороны AB под прямым углом. Найдите угол C треугольника ABC.

Ответ: $45°$ или $135°$.

40. В треугольник, периметр которого равен 18, вписана окружность, к которой проведена касательная параллельно основанию треугольника. Отрезок касательной, заключенный внутри треугольника, равен 2. Вычислите основание треугольника.

Ответ: 3 или 6.

41. На окружности радиуса 5 расположены две смежные вершины квадрата. Расстояние между центрами квадрата и окружности равно 7. Вычислите сторону квадрата.

Ответ: 6 или 8.

42. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC, касается его боковых сторон AC и BC в точках M и N. Найдите AB, если $AC = 8$ и $MN = 3$.

Ответ: 4 или 12.

43. Трапеция, боковые стороны которой равны 13 и 15, описана около окружности. Радиус окружности равен 6. Найдите основания трапеции.

Ответ: 7; 21 или 12; 16.

44. В окружность радиуса 5 вписан равнобедренный треугольник, сумма основания и высоты которого равна 16. Найдите высоту треугольника.

Ответ: 6,4 или 8.

45. Вычислите высоту CH тупоугольного треугольника ABC, если $\angle C = 45°$, $AH = 6$ и $BH = 1$.

Ответ: 2 или 3.

46. Найдите величину угла при основании равнобедренного треугольника, если отношение радиусов вписанной и описанной окружностей равно $\frac{4}{9}$.

Ответ: $\arccos\frac{1}{3}$ или $\arccos\frac{2}{3}$.

47. Дан квадрат $ABCD$. В плоскости квадрата взята точка M, такая, что $BM = CM$ и $\angle AMB = 75°$. Найдите величину угла BMC.

Ответ: $60°$ или $150°$.

48. Из вершины тупого угла ромба проведены две высоты. Расстояние между их концами равно половине диагонали ромба. Найдите углы ромба.

Ответ: $60°$; $120°$ или $30°$; $150°$.

49. На стороне BA угла ABC, равного 30°, взята такая точка D, что $AD = 2$ и $BD = 1$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, D и касающейся прямой BC.

Ответ: 1 или 7.

50. Медиана в треугольнике, выходящая из одной вершины, равна высоте, опущенной из другой вершины, и равна 1. Высота, опущенная из третьей вершины, равна $\sqrt{3}$. Найдите площадь треугольника.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\sqrt{3}$.

51. В треугольнике ABC проведены высоты AM и CN. Чему равен угол ABC, если $AC = 2MN$?

Ответ: $60°$ или $120°$.

52. Биссектриса внешнего угла при вершине B треугольника ABC равна биссектрисе внешнего угла при вершине A и равна стороне AB. Найдите углы треугольника ABC.

Ответ: $\angle A = \angle B = 36°$, $\angle C = 108°$ или $\angle A = 132°$, $\angle B = 12°$, $\angle C = 36°$ или $\angle A = 12°$, $\angle B = 132°$, $\angle C = 36°$.

53. В параллелограмме *ABCD* угол *ACD* равен $30°$. Известно, что центры окружностей, описанных около треугольников *ABD* и *BCD*, расположены на диагонали *AC*. Найдите угол *ABD*.

Ответ: $30°$ или $60°$.

54. Боковые стороны треугольника равны 25 и 30, а высота, проведенная к основанию, равна 24. Найдите основание.

Ответ: 11 или 25.

55. В треугольнике *ABC* сторона $AB = 6$, $\angle BAC = 30°$, радиус описанной окружности равен 5. Найдите сторону *AC*.

Ответ: $3\sqrt{3} \pm 4$.

56. Дан треугольник *ABC*, в котором $AC = \sqrt{2}$, $BC = 1$, $\angle ABC = 45°$. Найдите угол *BAC*.

Ответ: $30°$ или $150°$.

57. Точки *M* и *N* лежат на стороне *AC* треугольника *ABC* на расстояниях соответственно 2 и 6 от вершины *A*. Найдите радиус окружности, проходящей через *M* и *N* и касающейся прямой *AB*, если угол *BAC* равен $30°$.

Ответ: 2 или 14.

58. Внутри прямого угла дана точка *M*, расстояния которой от сторон угла равны 4 и 8. Прямая, проходящая через точку *M*, отсекает от прямого угла треугольник площадью 100. Найдите катеты треугольника.

Ответ: 20; 10 или 5; 40.

59. В равносторонний треугольник *ABC* вписан прямоугольник *PQRS* так, что основание прямоугольника *RS* лежит на стороне *BC*, а вершины *P* и *Q* – на сторонах *AB* и *AC* соответственно. В каком отношении точка *Q* должна делить сторону *AC*, чтобы площадь прямоугольника *PQRS* составляла $\frac{45}{98}$ площади треугольника *ABC*?

Ответ: $AQ : QC = 5 : 9$ или $AQ : QC = 9 : 5$.

60. Окружность, диаметр которой равен $\sqrt{10}$, проходит через соседние вершины *A* и *B* прямоугольника *ABCD*. Длина касательной, проведенной из точки *C* к окружности, равна 3, $AB = 1$. Найдите *BC*.

Ответ: $\frac{3(\sqrt{5} \pm 1)}{2}$.

61. Биссектрисы углов *B* и *C* параллелограмма *ABCD* пересекаются в точке *O*. Найдите площадь параллелограмма, если $\angle A = 2\arcsin\frac{2}{\sqrt{13}}$, $OA = 2\sqrt{10}$, $OD = 5$.

Ответ: 24 или 72.

62. Продолжения сторон *AD* и *BC* выпуклого четырехугольника *ABCD* пересекаются в точке *M*, а продолжения сторон *AB* и *CD* – в точке *O*. Отрезок *MO* перпендикулярен биссектрисе угла *AOD*. Найдите отношение площадей треугольника *AOD* и четырехугольника *ABCD*, если $OA = 12$, $OD = 8$, $CD = 2$.

Ответ: 2 или $\frac{14}{11}$.

63. В треугольнике *ABC* сторона $AB = 24$, $\angle BAC = 60°$, радиус описанной окружности равен 13. Найдите сторону *AC*.

Ответ: $12 \pm 5\sqrt{3}$.

64. В окружности радиуса $\sqrt{6}$ проведены хорда *MN* и диаметр *MP*. В точке *N* проведена касательная к окружности, которая пересекает продолжение диаметра *MP* в точке *Q* под углом $60°$. Найдите медиану *QD* треугольника *MQN*.

Ответ: $\sqrt{5 \pm \frac{5\sqrt{3}}{2}}$.

65. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан прямоугольник так, что две его вершины находятся на гипотенузе, а две другие – на катетах. Чему равны стороны прямоугольника, если известно, что они относятся как 5:2, а гипотенуза треугольника равна 45?

Ответ: 10; 25 или 7,5; 18,75.

66. (**МГУ, 1995**). В трапеции *KLMN* известны боковые стороны $KL = 36$, $MN = 34$, верхнее основание $LM = 10$ и $\cos(\angle KLM) = -\frac{1}{3}$. Найдите диагональ *LN*.

Ответ: 36 или $8\sqrt{19}$.

67. (**МГУ, 1998**). В окружности проведены хорды *KL*, *MN*, *PS*. Хорды *KL*, *PS* пересекаются в точке *C*, хорды *KL*, *MN* пересекаются в точке *A*, хорды *MN* и *PS* пересекаются в точке *B*, причем $AL = CK$, $AM = BN$, $BS = 5$, $BC = 4$. Найдите радиус окружности, если величина угла BAC равна $45°$.

Ответ: $\sqrt{53}$ или $\sqrt{13}$.

68. (**МГУ, 1984**). Две окружности радиусов 8 и 6 пересекаются в точках *A* и *B*. Через центры O_1 и O_2 окружностей проведена прямая; C_1 и C_2 – две из четырех точек пересечения этой прямой с окружностями, причем точка C_1 лежит на окружности с центром O_1, а длина отрезка C_1C_2 больше 20. Найдите расстояние между точками O_1 и O_2, если произведение площадей треугольников C_1O_1A и C_2O_2B равно 336.

Ответ: $6+2\sqrt{2}$.

69. В треугольнике *ABC* проведены медиана *AM* и высота *AH*. Известно, что $\frac{MH}{BH}=\frac{3}{2}$, а площадь треугольника *AMH* равна 24. Найдите площадь треугольника *ABC*.

Ответ: 80 или 16.

70. Трапеция *ABCD* с основаниями *AD* и *BC* вписана в окружность с центром *O*. Найдите высоту трапеции, если ее средняя линия равна 3 и $\sin\angle AOB=\frac{3}{5}$.

Ответ: 9 или 1.

71. Точка *H* – основание высоты треугольника со сторонами 10, 12, 14, опущенной на сторону, равную 12. Через точку *H* проведена прямая, отсекающая от треугольника подобный ему треугольник и пересекающая сторону, равную 10, в точке *M*. Найдите *HM*.

Ответ: $\frac{7}{3}$ или $\frac{14}{5}$.

72. В окружность радиуса $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ вписана трапеция с основаниями 3 и 4. Найдите расстояние от центра окружности до точки пересечения диагоналей трапеции.

Ответ: $\frac{24+3\sqrt{29}}{14}$ или $\frac{24-3\sqrt{29}}{14}$.

73. Дан параллелограмм *ABCD*. Точка *M* лежит на диагонали *BD* и делит ее в отношении $2:3$. Найдите площадь параллелограмма *ABCD*, если площадь четырехугольника *ABCM* равна 60.

Ответ: 150 или 100.

74. В равнобедренной трапеции *ABCD* ($AD \parallel BC$) расстояние от вершины *A* до прямой *CD* равно длине боковой стороны. Найдите углы трапеции, если $AB:BC=5$.

Ответ: $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$; $180°-\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$ или $\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$; $180°-\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$.

75. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, относится к радиусу вписанной в него окружности, как 5:2. Найдите площадь треугольника, если один его катетов равен *a*.

Ответ: $\frac{3a^2}{8}$ или $\frac{2a^2}{3}$.

76. Площади двух треугольников с общим основанием равны S_1 и S_2, где $S_1 \neq S_2$. Найдите площадь четырехугольника с вершинами в серединах их боковых сторон.

Ответ: $\frac{|S_1-S_2|}{2}$ или $\frac{S_1+S_2}{2}$.

77. В трапеции основания равны *a* и *b*, диагонали перпендикулярны, а угол между боковыми сторонами равен α. Найдите площадь трапеции.

Ответ: $\frac{ab(a+b)\mathrm{tg}\alpha}{2|a-b|}$.

78. В треугольнике *ABC* проведены высоты *AD* и *CE*. Найдите *AC*, если $BC=a$, $AB=b$, $DE:AC=k$.

Ответ: $\sqrt{a^2+b^2\pm 2abk}$.

79. На боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре построена окружность, делящая вторую боковую сторону на отрезки, равные *a* и *b*. Найдите основание треугольника.

Ответ: $\sqrt{2a(a+b)}$ или $\sqrt{2b(a+b)}$.

80. Две окружности радиусов R и r $(R > r)$ касаются внешним образом. Найдите радиусы окружностей, касающихся обеих данных окружностей и прямой, проходящей через центры данных.

Ответ: $\dfrac{Rr}{(\sqrt{R} \pm \sqrt{r})^2}$.

81. Окружности радиусов R и r касаются внешним образом. К ним проведена общая внешняя касательная; A и B – точки касания. Найдите радиус окружности, касающейся внешним образом данных окружностей и касающейся прямой AB.

Ответ: $\dfrac{Rr}{(\sqrt{R} \pm \sqrt{r})^2}$.

82. Внутри угла величины α с вершиной в точке O взята точка A. Расстояние от точки A до одной из сторон угла равно a, а проекция OA на другую его сторону равна b. Найдите OA.

Ответ: если $0° < \alpha < 90°$, то $\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\sin\alpha}}{\cos\alpha}$;
если $90° < \alpha < 180°$, то $-\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2 \pm 2ab\sin\alpha}}{\cos\alpha}$;
если $\alpha = 90°$, то при $a = b$ будет $OA > a$, при $a \neq b$ решений нет.

83. Пусть H – точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите углы треугольника ABC, если $\angle BAH = \alpha$, $\angle ABH = \beta$.

Ответ: $90° - \alpha,\ 90° - \beta,\ \alpha + \beta$, если $\alpha < 90°,\ \beta < 90°$;
$\alpha - 90°,\ 90° + \beta,\ 180° - \alpha - \beta$, если $\alpha > 90°,\ \beta < 90°$;
$90° + \alpha,\ \beta - 90°, 180° - \alpha - \beta$, если $\alpha < 90°,\ \beta > 90°$.

84. Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами $90°$ и $60°$. Найдите радиусы окружностей, если расстояние между их центрами равно a.

Ответ: $a(\sqrt{3} + 1),\ \dfrac{a\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + 1)$ или $a(\sqrt{3} - 1),\ \dfrac{a\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - 1)$.

85. Около окружности радиуса r описана равнобочная трапеция, периметр которой равен $2p$. Найдите большее основание трапеции.

Ответ: $\dfrac{p + \sqrt{p^2 - 16r^2}}{4}$ при $p > 4r$; при $p = 4r$ трапеция превращается в квадрат.

86. Основания трапеции равны a и b. Найдите длину отрезка, высекаемого диагоналями на средней линии.

Ответ: $\dfrac{1}{2}|a - b|$.

87. В треугольнике ABC угол A равен $60°$, $AB = 1$, $BC = a$. Найдите AC.

Ответ: если $a < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то решений нет;
если $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то одно решение $AC = \dfrac{1}{2}$;
при $\dfrac{\sqrt{3}}{2} < a < 1$ два $AC = \dfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{4a^2 - 3})$;
при $a \geq 1$ одно $AC = \dfrac{1}{2}(1 + \sqrt{4a^2 - 3})$.

88. Дан отрезок a. Три окружности радиуса R имеют центры в концах отрезка и в его середине. Найдите радиус четвертой окружности, касающейся трех данных.

Ответ: если $\dfrac{a}{4} < R < \dfrac{a}{2}$, то одно решение $\dfrac{a^2}{16R}$;
если $0 < R \leq \dfrac{a}{4}$ или $R \geq \dfrac{a}{2}$, то два $\dfrac{a^2}{16R}$ или $\dfrac{a^2}{8R}$.

89. В окружность радиуса R вписана трапеция. Прямые, проходящие через концы одного основания параллельно боковым сторонам, пересекаются в центре окружности. Боковая сторона видна из центра под углом α. Найдите площадь трапеции.

Ответ: если $\alpha < \dfrac{\pi}{3}$, то два решения $R^2\sin\alpha\left(1 \pm \sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$;

если $\frac{\pi}{3} \le \alpha < \pi$, то одно решение

$$R^2 \sin\alpha\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

90. В трапеции $ABCD$ дано: $AB = BC = CD = a$, $DA = 2a$. На прямых AB и AD взяты точки E и F, отличные от вершин трапеции, так, что точка пересечения высот треугольника CEF совпадает сточкой пересечения диагоналей трапеции $ABCD$. Найдите площадь треугольника CEF.

Ответ: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ или $2a^2\sqrt{3}$.

91. Угол ABC равен $60°$, причем $AB = BC = a$. Окружность S_1 касается AB в точке A, а окружность S_2 касается BC в точке C, кроме того, эти окружности касаются внешним образом. Найдите радиусы этих окружностей, если известно, что их отношение равно двум.

Ответ: задача имеет четыре варианта решения: $\frac{\sqrt{35}-3\sqrt{3}}{4}a$ и $\frac{\sqrt{35}-3\sqrt{3}}{2}a$, или $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ и $\frac{a\sqrt{3}}{3}$, или $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ и $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$, или $\frac{\sqrt{35}+3\sqrt{3}}{4}a$ и $\frac{\sqrt{35}+3\sqrt{3}}{2}a$.

92. Расстояние между центрами двух окружностей равно $10r$. Одна из окружностей имеет радиус $5r$, другая $6r$. Некоторая прямая пересекает меньшую окружность в точках A и B и касается большей в точке C. Найдите длину хорды.

Ответ: $2r\sqrt{21}$ или $6r$.

93. Дан равнобедренный треугольник ABC $(AB = BC)$. В точке M к окружности, вписанной в треугольник, проведена касательная, перпендикулярная к стороне BC. $D-$ точка пересечения касательной со стороной BC. Определите площадь треугольника ABC, если радиус вписанной окружности равен r, а площадь треугольника MBD равна S.

Ответ: $\frac{\left(\sqrt{4S^2+4Sr^2+2r^4}+r^2\right)^2}{2S-r^2}$ или $\frac{\left(\sqrt{4S^2-4Sr^2+2r^4}+r^2\right)^2}{2S-r^2}$.

94. (МИЭТ, 2003). Две окружности касаются внутренним образом. Хорда AB большей окружности касается меньшей окружности в точке M. Найдите радиус меньшей окружности, если известно, что длины отрезков $AM = 28$, $MB = 4$, а радиус большей окружности равен 20.

Ответ: 7 или 1,75.

95. (МИЭТ, 2003). Две окружности касаются внешним образом. Прямая касается первой окружности в точке M и пересекает вторую окружность в точках A и B. Найдите радиус первой окружности, если известно, что $AB = 12$, $MB = 6$, а радиус второй окружности равен 10.

Ответ: 3 или 27.

96. (МИЭТ, 2000). Сторона квадрата равна a. Найдите радиус окружности, касающейся стороны квадрата и окружностей радиуса a с центрами в вершинах квадрата, принадлежащих одной из его сторон.

Ответ: $\frac{a}{16}$ или $\frac{3a}{8}$, или $\frac{a}{6}$.

97. (МИЭТ, 2000). Два квадрата $ABCD$ и $AMHK$, расположены так, что стороны AB и AM образуют угол в $45°$. Известно, что площадь пересечения квадратов равна 8,5, а площадь их объединения равна 34,5. Найдите площадь каждого из квадратов.

Ответ: $S_{ABCD} = 25$; $S_{AMHK} = 18$ или $S_{ABCD} = 18$; $S_{AMHK} = 25$.

98. (МИЭТ, 2000). Два равнобедренных треугольника ABC и AMH, расположены так, что стороны AB и AM образуют угол в $45°$. Известно, что площадь пересечения треугольников равна 49, а площадь их объединения равна 213. Найдите площадь каждого из треугольников.

Ответ: $S_{ABC} = 100$; $S_{AMH} = 162$ или $S_{ABC} = 162$; $S_{AMH} = 100$.

99. Две окружности, касающиеся прямой в точках A и B, пересекаются в точках C и D. Найдите медиану CE треугольника ABC.

Ответ: 16 или 1.

100. Три окружности радиуса r попарно касаются друг друга. Найдите радиус окружности, касающейся всех этих окружностей.

Ответ: $r\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\pm 1\right)$.

Список и источники литературы.

1. Гордин Р.К. ЕГЭ 2010. Математика. Задача С4 / Под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2010. – 148 с.

2. ЕГЭ 2010. Математика: Сборник тренировочных работ / Высоцкий И.Р., Захаров П.И., Панфёров В.С., Семёнов А.В., Сергеев И.Н., Смирнов В.А., Шестаков С.А., Ященко И.В. – М.: МЦНМО, 2010.

3. ЕГЭ 2010. Математика. Типовые тестовые задания /под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2010.

4. Единый государственный экзамен 2010. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2010.

5. Корянов А.Г. Математика. ЕГЭ 2010. Задания типа С4. Многовариантные задачи по планиметрии http://www.alexlarin.narod.ru/ege/2010/C4agk.pdf

6. Панферов В.С., Сергеев И.Н. Отличник ЕГЭ. Математика. Решение сложных задач; ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2010.

7. Полонский В.Б., Рабинович Е.М., Якир М.С. Учимся решать задачи по геометрии. Учеб.-метод. пособие. – К. «Магистр», 1996, – 256 стр. (*глава IV «Многовариантные задачи»*).

8. Прокофьев А.А. Пособие по геометрии для подготовительных курсов (планиметрия). – 4-е изд. перераб. и доп. – М.: МИЭТ, 2007, 232 стр.

9. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ 2010: Математика /авт.-сост. И.Р. Высоцкий, Д.Д. Гущин, П.И. Захаров и др.; под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: АСТ: Астрель, 2009. – (Федеральный институт педагогических измерений).

10. Шарыгин И.Ф. Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами / И.Ф. Шарыгин, Р.К. Гордин. – М.: ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ», 2001. – 400 с.: ил.

11. О полезности интерпретации решения задачи / А.Я. Цукарь. – Математика в школе, №7, 2000.

12. Ященко И.В., Шестаков С.А., Захаров П.И. Подготовка к ЕГЭ по математике в 2010 году. Методические указания. – М.: МЦНМО, 2009.

13. www.mathege.ru – Математика ЕГЭ 2010, 2011 (открытый банк заданий).

14. www.alexlarin.narod.ru – сайт по оказанию информационной поддержки студентам и абитуриентам при подготовке к ЕГЭ, поступлению в ВУЗы и изучении различных разделов высшей математики.

15. http://eek.diary.ru/ – сайт по оказанию помощи абитуриентам, студентам, учителям по математике.