Агентство образования администрации Красноярского края
Красноярский государственный университет
Заочная естественно-научная школа при КрасГУ

МАТЕМАТИКА
ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ.
РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Модуль № 4 для 11 класса
Учебно-методическая часть

Красноярск 2006

Математика: Модуль №4 для 11 класса. Учебно-методическая часть./ Сост.: А.М.Быковских, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики, КрасГУ. – Красноярск, 2006 — 38 с.

ISBN 5-7638-0705-7

Печатается по решению Дирекции
Краевого государственного учреждения дополнительного образования
Заочная естественно-научная школа
при Красноярском государственном университете

ISBN 5-7638-0705-7

© Красноярский государственный университет, 2006

Программа модуля

1. Определения и свойства показательной и логарифмической функций. Логарифмирование и потенцирование.
2. Преобразование и вычисление логарифмических и показательных выражений.
3. Показательные и логарифмические уравнения и основные методы их решения.
4. Уравнения, содержащие неизвестное в основании логарифма и в основании степени.
5. Логарифмические и показательные неравенства.
6. Уравнения и неравенства с параметром.
7. Системы уравнений и неравенств.
8. Нестандартные методы решения стандартных и нестандартных задач.
9. Графическое решение уравнений и неравенств.

ВВЕДЕНИЕ

Дорогие школьники! Вы приступаете к изучению темы "Логарифмические и показательные функции. Решение уравнений и неравенств". Поскольку эта тема обычно изучаются в школе в конце 11 класса, в методическом пособии приводятся основные определения и свойства показательных и логарифмических функций, а также примеры решения уравнений и неравенств. Конечно, методическое пособие не может заменить учебник, поэтому перед выполнением задания нужно прочитать соответствующие разделы учебника. Краткость изложения теории в данном пособии компенсируется разбором большого числа примеров различной степени трудности.

1. Показательная и логарифмическая функции

1.1. Определения и свойства показательной и логарифмической функций

Определение 1.1. *Функция $y = a^x$, где a — любое положительное число, отличное от единицы, называется* ***показательной функцией.***

Областью определения показательной функции является множество всех действительных чисел, а множеством значений - множество всех положительных чисел. Важным свойством показательной функции является её строгая монотонность: при $a > 1$ функция строго возрастает, а при $a < 1$ — строго убывает. Число a называется *основанием* показательной функции.

Для любых $a > 0$, $b > 0$ и при любых значениях x и y верны равенства (основные свойства степени):

$$a^x a^y = a^{x+y}, \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\left(a^x\right)^y = a^{xy}, \qquad (ab)^x = a^x b^x$$

Используя определение и свойства показательной функции, мы уже можем решать простые уравнения. Например, легко решается уравнение

$3^x = 81$. Достаточно заметить, что $81 = 3^4$. Тогда из строгой монотонности показательной функции сразу же следует решение $x = 4$. Напомним, что монотонная функция каждое свое значение принимает ровно один раз.

А если нужно решить уравнение $3^x = 80$? Для решения таких уравнений необходимо ввести функцию, обратную показательной.

Итак, пусть даны положительные действительные числа $a \neq 1$ и b. Требуется найти такое действительное число x, что $a^x = b$.

Определение 1.2. ***Логарифмом*** *числа b ($b > 0$) по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) называется показатель степени, в которую надо возвести основание a, чтобы получить число b.*

Логарифм числа b по основанию a обозначается $\log_a b$. Для наиболее часто используемых оснований 10 и $e = 2{,}718281828459045...$ применяются специальные обозначения. Если основание $a = 10$, то логарифм называется *десятичным* и обозначается значком $\lg b$, т. е. $\log_{10} b \equiv \lg b$. Если основание $a = e$, то логарифм называется ***натуральным*** и обозначается значком $\ln b$, т. е. $\log_e b \equiv \ln b$.

Из определения логарифма следует, что

$$\log_a a = 1; \qquad \log_a 1 = 0$$

Определение 1.3. *Функция $y = \log_a x$, где a — любое положительное число, отличное от единицы, называется* ***логарифмической*** *функцией.*

Областью определения логарифмической функции является множество всех положительных чисел, а множеством значений — множество всех действительных чисел. Функция $y = \log_a x$ при $a > 1$ строго возрастает, а при $0 < a < 1$ строго убывает.

Показательная и логарифмическая функции являются взаимно обратными. Это означает, что

$$\log_a a^x = x \quad \text{при } a > 0, \quad a \neq 1,$$
$$a^{\log_a x} = x \quad \text{при } a > 0, \ a \neq 1, \ x > 0. \tag{1}$$

Формула (1) называется основным логарифмическим тождеством. Основные свойства логарифмов выражают следующие формулы, справедливые при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$:

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y, \tag{2}$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \tag{3}$$

$$\log_{a^\beta} x^\beta = \frac{\beta}{\alpha} \log_a x, \ \ \alpha \neq 0, \alpha \in R, \ \beta \in R, \tag{4}$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}. \tag{5}$$

Формула (5) называется *формулой перехода* от основания a к основанию b. Из неё следует формула

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \tag{6}$$

часто используемая при решении логарифмических уравнений.

Применяя формулы (2)–(3), необходимо помнить, что в них правые и левые части определены на разных множествах: в правых частях этих равенств x и y могут принимать только положительные значения, а левые части определены при любых значениях x и y одного знака, т.е. при $x > 0$, $y > 0$, а также $x < 0$, $y < 0$. Такую же особенность может иметь формула (4). Например, при $\beta = 2$ её левая часть определена для всех $x \neq 0$, а правая лишь для $x > 0$. Использование этих формул может привести как к потере корней уравнения, так и к появлению посторонних значений переменной.

1.2. Вычисление значений показательных и логарифмических выражений

Чтобы лучше понять и запомнить основные свойства показательной и логарифмической функций, рассмотрим несколько примеров. В приведенных ниже задачах нужно путем преобразования показательных и логарифмических выражений вычислить их значения. Эти же преобразования помогут нам в дальнейшем решать показательные и логарифмические уравнения и неравенства.

ПРИМЕР 1.1. Вычислить значение выражения $19^{\lg 37\cdot\lg^{-1}19}$.

РЕШЕНИЕ. Применяя свойства степеней, формулу (5) и основное логарифмическое тождество, получаем

$$19^{\lg 37\cdot\lg^{-1}19}=19^{\log_{19}37}=37.\ \square$$

ПРИМЕР 1.2. Вычислить значение выражения

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{\log_5 3}}\cdot 3^{\log_3^2 4}-5\cdot 4^{\log_3 4}+\lg 0{,}1.$$

РЕШЕНИЕ. Преобразуем первое слагаемое.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{\log_5 3}}\cdot 3^{\log_3^2 4}=\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{\log_5 3}}\cdot 3^{\log_3^2 4}=$$
$$=3^{\log_3 5}\cdot 3^{\log_3 4\cdot\log_3 4}=5\cdot\left(3^{\log_3 4}\right)^{\log_3 4}=5\cdot 4^{\log_3 4}.$$

Учитывая, что $\lg 0{,}1=-1$, окончательно получим

$$5\cdot 4^{\log_3 4}-5\cdot 4^{\log_3 4}-1=-1.\square$$

ПРИМЕР 1.3. Вычислить значение выражения $\frac{3}{7}(\log_2 32+27^{\log_3 4})^{\log_{69}14}$.

РЕШЕНИЕ. Используя свойство (4) и основное логарифмическое тождество, преобразуем выражение в круглых скобках:

$$\log_2 32+27^{\log_3 4}=\log_2(2^5)+(3^3)^{\log_3 4}=$$
$$=5\log_2 2+3^{3\log_3 4}=5+3^{\log_3 4^3}=5+4^3=69.$$

Исходное выражение принимает вид $\frac{3}{7}(69^{\log_{69}14})$. Используя основное логарифмическое тождество, окончательно получим

$$\frac{3}{7}(69^{\log_{69}14})=\frac{3}{7}\cdot 14=6.\square$$

ПРИМЕР 1.4. Выразить $\log_{600}900$ через a и b, где $a=\log_5 2{,}6=\log_2 3$.

РЕШЕНИЕ. Применив формулы (5), (2), (4), (6) и разлагая числа 600 и 900 на простые множители, получаем

$$\log_{600}900=\frac{\log_2 900}{\log_2 600}=\frac{\log_2(2^2\cdot 3^2\cdot 5^2)}{\log_2(2^3\cdot 3\cdot 5^2)}=$$
$$=\frac{2+2\log_2 3+2\log_2 5}{3+\log_2 3+2\log_2 5}=\frac{2(1+b+\frac{1}{a})}{3+b+\frac{2}{a}}=\frac{2(1+a+ab)}{2+3a+ab}.\ \square$$

ПРИМЕР 1:5. Найти значение выражения $\log_3{}^2 15-\frac{\log_3 45}{\log_5 3}$.

РЕШЕНИЕ. Применив формулы (3), (5), и переходя во всех логарифмах к основанию 3 получаем

$$(\log_3 3+\log_3 5)^2-(\log_3 9+\log_3 5)\log_3 5=$$
$$=(1+\log_3 5)^2-(2+\log_3 5)\log_3 5=$$
$$=1+2\log_3 5+\log_3{}^2 5-2\log_3 5-\log_3{}^2 5=1.\ \square$$

ПРИМЕР 1.6. Вычислить

$$(\log_3 2+\log_2 81+4)(\log_3 2-2\log_{18}2)\log_2 3-\log_3 2.$$

РЕШЕНИЕ. Перейдем во всех логарифмах к основанию 3. Получим

$$\left(\log_3 2+\frac{\log_3 81}{\log_3 2}+4\right)\left(\log_3 2-2\frac{\log_3 2}{\log_3 18}\right)\frac{1}{\log_3 2}-\log_3 2=$$
$$=\left(\log_3 2+\frac{4}{\log_3 2}+4\right)\left(\log_3 2-2\frac{\log_3 2}{\log_3 2+2}\right)\frac{1}{\log_3 2}-\log_3 2=$$
$$=\frac{\log_3{}^2 2+4\log_3 2+4}{\log_3 2}\cdot\frac{\log_3{}^2 2+2\log_3 2-2\log_3 2}{\log_3 2+2}\times$$
$$\times\frac{1}{\log_3 2}-\log_3 2=\frac{(\log_3 2+2)^2}{\log_3 2}\cdot\frac{\log_3{}^2 2}{\log_3 2+2}\cdot\frac{1}{\log_3 2}-\log_3 2=2.$$

ПРИМЕР 1.7. Вычислить $\log_{\sqrt{3}}\sqrt[6]{1{,}5}$, если $\log_{0,5}27=a$.

РЕШЕНИЕ. Применив формулы (4), (3), получаем

$$\log_{\sqrt{3}}\sqrt[6]{1{,}5}=\frac{1}{3}\log_3\frac{3}{2}=\frac{1}{3}(1-\log_3 2)=\frac{1}{3}(1+\log_3 0{,}5).$$

В последнем выражении перейдем к логарифму по основанию 0,5 по формуле (6). В результате получим

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3\log_{0,5}3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{\log_{0,5}27}\frac{1}{3}+\frac{1}{a}.\ \square$$

Вообще при решении любых задач, содержащих логарифмы по различным основаниям, полезно запомнить одну рекомендацию, почти не имеющую исключений: необходимо перейти во всех логарифмах к одному основанию.

Сформулировав эту рекомендацию, рассмотрим примеры, в которых переход к одному основанию ничего не дает.

При решении неравенств часто возникает потребность сравнивать числа, записанные с помощью логарифмов. Предполагается, что ответить на вопрос "Какое из двух заданных чисел больше?" нужно без использования калькулятора, а только на основании свойств неравенств и свойств логарифмической функции.

ПРИМЕР 1.8. Сравнить числа a и b, если

$$a = \log_5 11 \qquad b = \log_2 3.$$

РЕШЕНИЕ. Очевидно, что каждое из сравниваемых чисел больше 1, но меньше 2. Заметив, что $2a = \log_5 121 < \log_5 125 = 3$, $2b = \log_2 9 > \log_2 8 = 3$, получим $2a < 2b$, откуда $a < b$, т.е. $\log_5 11 < \log_2 3$. □

Предложенный метод сравнения можно назвать методом "вставки" (между двумя сравниваемыми числами вставляется еще одно число, разделяющее данные два числа).

Однако этот метод плохо реализуется, если сравниваемые числа очень близки друг к другу

ПРИМЕР 1.9. Сравнить числа a и b, если

$$a = \log_{10} 11 \qquad b = \log_{11} 12.$$

РЕШЕНИЕ. При решении этого примера срабатывает один любопытный прием. Вычтем из рассматриваемых чисел по 1. Тогда получим

$$\log_{10}11 - 1 = \log_{10}11 - \log_{10}10 = \log_{10}\frac{11}{10} = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{10}\right) >$$

$$> \log_{11}\left(1 + \frac{1}{10}\right) > \log_{11}\left(1 + \frac{1}{11}\right) = \log_{11}\frac{12}{11} = \log_{11}12 - 1. \square$$

Здесь мы воспользовались монотонностью логарифмической функции.

1.3. Логарифмирование и потенцирование

При решении показательных и логарифмических уравнений часто используются два преобразования: *логарифмирование* и *потенцирование.*

Определение 1.4. *Логарифмированием по основанию* a ($a > 0$, $a \neq 1$) *называется переход от уравнения* $f(x) = g(x)$ *к уравнению* $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

Логарифмирование в общем случае является неравносильным преобразованием. Причем неравносильность здесь особенно опасна: она может привести к потере корней уравнения. Например, если $f(x) = x^2$, $g(x) = x$, то переход от уравнения $x^2 = x$ к уравнению $\log_2 x^2 = \log_2 x$ приводит к потере корня $x = 0$. Потери корней при логарифмировании заведомо не произойдет, если хотя бы одна из функций положительна. В этом случае логарифмирование будет равносильным преобразованием.

Определение 1.5. ***Потенцированием по основанию*** a ($a > 0$, $a \neq 1$) *называется переход от уравнения* $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ *к уравнению* $f(x) = g(x)$.

Ясно, что это преобразование в общем случае также не является равносильным. Оно может привести к получению посторонних корней. Например, если от уравнения $\log_7(x^2 - 2) = \log_7 x$ перейти к уравнению $x^2 - x - 2 = 0$, то появится посторонний корень $x = -1$.

При помощи логарифмирования легко доказывается полезная формула:

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}.$$

Действительно, логарифмируя по основанию b правую и левую части равенства (оба выражения положительны? поэтому логарифмирование является равносильным преобразованием) и используя формулу (4), получим

$$\log_b a^{\log_b c} = \log_b c \cdot \log_b a; \qquad \log_b c^{\log_b a} = \log_b a \cdot \log_b c.$$

Поскольку логарифмы от правой и левой частей равенства совпадают, то совпадают и сами выражения.

2. Показательные и логарифмические уравнения

2.1. Показательные уравнения

Приведем утверждения, на которых основано решение показательных уравнений.

1. ***Простейшее*** *показательное уравнение*

$$a^x = b, \text{ где } a > 0,\ a \neq 1,$$

не имеет корней при $b < 0$ *и имеет единственный корень* $x = \log_a b$ *при* $b > 0$.

В частности, уравнение $a^x = a^a$, $a > 0$, $a \neq 1$ имеет единственный корень $x = a$.

2. *Уравнение*

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}, \quad a > 0,\ a \neq 1$$

равносильно уравнению

$$f(x)=g(x).$$

3. *Уравнение*

$$a^{f(x)} = b^{g(x)}, \quad a > 0,\ b > 0,\ a \neq 1$$

равносильно каждому из уравнений

$$a^{f(x)} = a^{g(x)\log_a b}, \quad f(x)=g(x)\log_a b.$$

Пример 2.1. Решить уравнение $64^{x/2} \cdot 3^x = 576$.

Решение. Заметим, что $64 = 8^2$, $576 = 24^2$. Тогда данное уравнение равносильно каждому из уравнений

$$8^x \cdot 3^x = 24^2,\ 24^x = 24^2, \text{ откуда } x = 2.\ \square$$

Пример 2.2. Решить уравнение $\left(\frac{16}{9}\right)^{x^2+2x} = \left(\frac{3}{4}\right)^{x-3}$.

Решение. Это уравнение равносильно каждому из следующих уравнений:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{2x^2+4x} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3-x},\ 2x^2+4x=3-x,\ 2x^2+5x-3=0,$$

откуда находим $x_1 = -3$, $x_2 = 1/2$. □

Пример 2.3. Решить уравнение

$$4^x + 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}.$$

Решение. Обозначим $x - 1/2 = t$, тогда уравнение примет вид

$$2 \cdot 4^t - 3^t = 3 - 3^t - 4^t.$$

Это уравнение равносильно каждому из следующих уравнений:

$$3 \cdot 4^t = 4 \cdot 3^t,\ \left(\frac{4}{3}\right)^t = \frac{4}{3}, \text{ откуда } t = 1,\ x = \frac{3}{2}.\ \square$$

Пример 2.4. Решить уравнение $3^x - 18 \cdot 3^{-x} = 7$.

Решение. Полагая $3^x = t$, получим уравнение $t - \frac{18}{t}t = 7$ или $t^2 - 7 < -18 = 0$, откуда находим $t_1 = -2$, $t_2 = 9$. Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений $3^x = -2$, $3^x = 9$. Первое из них не имеет корней (так как показательная функция всегда положительна), второе имеет единственный корень $x = 2$. □

Пример 2.5. Решить уравнение

$$3 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 9^x = 0.$$

Решение. Запишем уравнение в виде

$$2 \cdot (3^x)^2 - 5 - 3^x - 2^x + 3 - (2^x)^2 = 0$$

и заметим, что левая часть последнего уравнения — однородный многочлен степени 2 от u и v, где $u = 2^x$, $v = 3^x$ (сумма степеней u и v в каждом члене этого многочлена равна двум).

Разделив обе части уравнения на 2^{2x} и полагая $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t$, получим уравнение $2t^2 - 5t + 3 = 0$, имеющее корни $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{3}{2}$. Исходное уравнение равносильно совокупности уравнений $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1$, $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{2}$, откуда находим $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. □

ПРИМЕР 2.6. Решить уравнение

$$\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x+\left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^x=6.$$

РЕШЕНИЕ. Заметим, что $(3-\sqrt{8})\cdot(3+\sqrt{8})=1$. Воспользуемся равенством $3-\sqrt{8}=\frac{1}{3+\sqrt{8}}$ и положим $(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}})^x=t$. Тогда уравнение примет вид $t+\frac{1}{t}=6$ или $t^2-6t+1=0$, откуда $t_1=3+\sqrt{8}$, $t_2=3-\sqrt{8}$. Исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x=3+\sqrt{8},\quad \left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^x=3-\sqrt{8}=\frac{1}{3+\sqrt{8}},$$

откуда находим $x_1=3$, $x_2=-3$. □

ПРИМЕР 2.7. Решить уравнение $3^x+4^x=25$.

РЕШЕНИЕ. Число 2 является корнем этого уравнения. Докажем, что других корней нет. Так как каждая из функций 3^x и 4^x является возрастающей, то и функция $f(x)=3^x+4^x$ — также возрастающая. Поэтому $f(x)<f(2)=25$ при $x<2$ и $f(x)>f(2)$ при $x>2$, т. е. функция $f(x)$ не принимает значение, равное 25, при $x\neq 2$. Это означает, что $x=2$ — единственный корень уравнения. □

2.2. Логарифмические уравнения

Решая логарифмические уравнения, нужно ясно представлять, какие преобразования вы используете. Если преобразование может привести к появлению посторонних корней (такие преобразования называются допустимыми), то необходимо либо производить проверку полученных решений, либо следить за изменением ОДЗ уравнения. Применять преобразования, которые могут привести к потере корней уравнения нельзя.

При решении логарифмических уравнений используют следующие

преобразования:

1) замену функции $\log_a f(x)+\log_a g(x)$ на функцию

$$\log_a[f(x)\,g(x)];$$

2)замену функции $\log_a f(x)-\log_a g(x)$ на функцию

$$\log_a\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Как известно, эти преобразования, основанные на свойствах логарифмов, являются допустимыми, т. е. могут привести к появлению посторонних корней.

Обратные замены могут привести к потере корней исходного уравнения из-за возможного сужения ОДЗ уравнения. Чтобы избежать потери корней, следует заменять функции $\log_a[f(x)\,g(x)]$ и $\log_a\frac{f(x)}{g(x)}$ на функции

$$\log_a|f(x)|+\log_a|g(x)| \text{ и } \log_a|f(x)|-\log_a|g(x)|$$

соответственно. Такие преобразования являются допустимыми. Приведем еще формулу

$$\log_a x^{2k}=2k\log_a|x|,\quad k\in N,$$

применяемую при решении логарифмических уравнений, и обратим внимание на то, что отбрасывание знака модуля в правой части равенства — грубейшая ошибка.

Сформулируем утверждения, относящиеся к решению логарифмических уравнений.

1. ***Простейшее логарифмическое уравнение***

$$\log_a x=b,\ \textit{где}\ a>0,\ a\neq 1,$$

имеет ***единственный корень x = a^b при любом b.***

2. Потенцирование является допустимым преобразованием, *а* ***логарифмирование может привести к потере корней.***

ПРИМЕР 2.8. Решить уравнение

$$\log_2(x^3+9)=\log_2(x+3)+21\text{og}_2(x-1). \tag{7}$$

РЕШЕНИЕ. Область допустимых значений уравнения (7) — множество чисел x таких, что $x>1$. Заменив в правой части уравнения сумму логарифмов на логарифм произведения, получим уравнение

$$\log_2(x^3 + 9) = \log_2[(x + 3)(x - 1)^2], \tag{8}$$

которое является следствием исходного уравнения. При этом преобразовании посторонние корни могут появиться благодаря расширению ОДЗ уравнения.

Потенцируя, получаем уравнение

$$x^3 + 9 = (x + 3)(x - 1)^2, \tag{9}$$

которое является следствием уравнений (7) и (8). Уравнение (9) можно заменить равносильным уравнением

$$x^2 - 5x - 6 = 0,$$

которое имеет корни $x_1 = -1$, $x_2 = 6$.

Поскольку мы дважды применяли допустимые преобразования, необходимо проверить корни.

Число –1 не содержится в ОДЗ уравнения (7), а число 6 входит в ОДЗ этого уравнения и является его корнем. □

Пример 2.9. Решить уравнение

$$\log_5(-x^7) + 2 = \log_{25} x^8 \tag{10}$$

Решение. Заметим, что ОДЗ уравнения (10) – множество отрицательных чисел. Пусть $t = -x$, $t > 0$. Используя формулу (7), запишем уравнение (10) в виде

$$\log_5 t^7 + 2 = 4 \log_5 t^4. \tag{11}$$

Так как $t > 0$, то уравнение (11) равносильно уравнению

$$7 \log_5 t + 2 = 4 \log_5 t,$$

откуда находим $\log_5 t = -\frac{2}{3}$, $t = 5^{-\frac{2}{3}}$, $x = -5^{-\frac{2}{3}}$. □

Пример 2.10. Решить уравнение

$$\log_5(3 \cdot 2^{1+x} - 2^{-x} \cdot 5^{2x+1}) = x + \log_5 13. \tag{12}$$

Решение. Так как правую часть уравнения (12) можно записать в виде $\log_5(13 \cdot 5^x)$, где $13 \cdot 5^x > 0$, то потенцирование приводит к уравнению

$$3 \cdot 2^{1+x} - 2^{-x} \cdot 5^{2x+1} = 13 \cdot 5^x, \tag{13}$$

равносильному уравнению (12).

Разделив обе части уравнения (13) на 2^x и обозначив $\left(\frac{5}{2}\right)^x = t$, $t > 0$, получим уравнение $6 - 5t^2 = 13t$ или $5t^2 + 13t - 6 = 0$, имеющее корни $t_1 = \frac{2}{5}$ и $t_2 = -3$. Второй корень является посторонним. Следовательно, $\left(\frac{5}{2}\right)^x = \frac{2}{5}$, откуда получим $x = -1$. □

Пример 2.11. Решить уравнение

$$\log_2 x + \log_x 2 = \frac{10}{3}. \tag{14}$$

Решение. Область допустимых значений уравнения (14) — множество E чисел x таких, что

$$x > 0,\ x \neq 1. \tag{15}$$

Тогда $\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$ и уравнение (14) примет вид $t + \frac{1}{t} = \frac{10}{3}$ или $3t^2 - 10t + 3 = 0$, где $t = \log_2 x$. Отсюда находим $t_1 = 3$, $t_2 = \frac{1}{3}$. Если $t = 3$, то $\log_2 x = 3$, $x = 8$. Если $t = \frac{1}{3}$, то $x = \sqrt[3]{2}$. Найденные значения x удовлетворяют условиям (15) и являются корнями уравнения (14). □

Пример 2.12. Решить уравнение

$$1 - \log_9 (x+1)^2 = \frac{1}{2} \log_{\sqrt{3}} \frac{x+5}{x+3}. \tag{16}$$

Решение. Переходя к логарифмам по основанию 3, получаем уравнение

$$1 - \log_9 |x+1| = \log_3 \frac{x+5}{x+3}, \tag{17}$$

равносильное уравнению (16).

Уравнение

$$\frac{3}{|x+1|} = \frac{x+5}{x+3}, \tag{18}$$

полученное из уравнения (17) в результате потенцирования, является следствием уравнения (17).

При решении уравнения (18) нужно рассмотреть два возможных случая: x > –1 и x < –1.

Если $x > -1$, то $|x + 1| = x + 1$ и уравнение (18) примет вид

$$\frac{3}{x+1} = \frac{x+5}{x+3}. \qquad (19)$$

Умножая обе части уравнения (19) на (x + 1)(*ж* + 3), получим уравнение

$$3x + 9 = x^2 + 5x + 6,$$

являющееся следствием уравнения (19) и имеющее корни $x = -4$ (не удовлетворяет условию $x > -1$) и $x = 1$.

Аналогично, если $x < -1$, то уравнение (18) преобразуется к виду $x^2 + 9x + 14 = 0$, откуда находим $x = -7$ и $x = -2$ (оба корня меньше чем –1). Проверка показывает, что числа 1, –7 и –2 входят в ОДЗ уравнения (16) и являются его корнями. □

Пример 2.13. Решить уравнение

$$5 \cdot x^{\log_3 2} + 2^{\log_3 x} = 24. \qquad (20)$$

Решение. Заметим, что

$$x^{\log_3 2} = 2^{\log_3 x} \qquad (21)$$

Равенство (21) является верным при всех $x > 0$, так как логарифмы по основанию 3 его левой и правой частей совпадают. Используя равенство (21), заменим уравнение (20) равносильным уравнением $2^{\log_3 x} = 4$, откуда $\log_3 x = 2$, $x = 9$. □

При решении уравнений, содержащих функции вида $f(x)^{g(x)}$ следует иметь в виду, что:

а) если $f(x) < 0$, то выражение $f(x)^{g(x)}$ не имеет смысла,

б) если $f(x) = 0$, то это выражение считается равным нулю при $g(x) > 0$ и не имеющим смысла при $g(x) \le 0$;

в) при $f(x) > 0$ функция $f(x)^{g(x)}$ определяется формулой

$$f(x)^{g(x)} = a^{g(x)\log_a f(x)},$$

где a — любое положительное число, не равное единице;

г) функция вида $\log_{g(x)} f(x)$, где $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $g(x) \neq 1$, определяется формулой

$$\log_{g(x)} f(x) = \frac{\log_a f(x)}{\log_a g(x)},$$

где a — любое положительное число, не равное единице.

Пример 2 14. Решить уравнение

$$\sqrt{\log_{\sqrt{x}}(5x)}\,\log_5 x = -2 \qquad (22)$$

Решение. Данное уравнение имеет смысл, если $x > 0$, $x \neq 1$ и $\log_{\sqrt{x}}(5x) > 0$. Переходя к логарифмам по основанию 5 и возведя обе его части в квадрат, получаем уравнение

$$\log_5^2 x \frac{\log_5(5x)}{\log_5 \sqrt{x}} = 4, \qquad (23)$$

являющееся следствием уравнения (22). Уравнение (23) можно записать в виде

$$\log_5^2 x + \log_5 x - 2 = 0,$$

откуда $\log_5 x = 1$, $\log_5 x = -2$.

Значение $\log_5 x = 1$ следует отбросить, так как в этом случае левая часть равенства (22) неотрицательна. Итак, $\log_5 x = -2$, откуда $x = \frac{1}{25}$. □

Пример 2 15. Решить уравнение

$$1 + \log_x(4 - x) = \log_5 3 \cdot \log_x 5. \qquad (24)$$

Решение. Так как $\log_5 3 \cdot \log_x 5 = \log_x 5^{\log_5 3} = \log_x 3$, то уравнение (24) можно записать в виде

$$\log_x x + \log_x(4 - x) = \log_x 3,$$

откуда получаем уравнение $x(4 - x) = 3$, являющееся следствием уравнения (24). Из последнего уравнения находим $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. При $x = 1$ уравнение (24) теряет смысл (основание логарифма равно 1), а $x = 3$ —корень уравнения (24). □

Пример 2.16. Решить уравнение $\log_{3x} x = \log_{9x} x$.

Решение. Решение этого уравнения, очевидно, следует искать лишь среди значений x, удовлетворяющих условиям $x > 0$, $3x \neq 1$, $9x \neq 1$. Перейдем к основанию 3:

$$\frac{\log_3 x}{\log_3 3x} = \frac{\log_3 x}{\log_3 9x}, \text{ или } \log_3 x\left(\frac{1}{1+\log_3 x} - \frac{1}{2+\log_3 x}\right) = 0.$$

Отсюда следует, что $\log_3 x = 0$ или $1 + \log_3 x = 2 + \log_3 x$. Решением первого уравнения является $x = 1$, а второе уравнение решений не имеет. □

Пример 2.17. Решить уравнение

$$\log_7(3-2x) \bullet \log_x(3-2x) = \log_7(3-2x) + \log_7 x^2. \qquad (25)$$

Решение. Допустимые значения x определяются условиями

$$0 < x < \frac{3}{2}, \qquad x \neq 1. \qquad (26)$$

Переходя к логарифмам по основанию x, запишем уравнение (25) в виде

$$\frac{\log_x^2(3-2x)}{\log_x 7} = \frac{\log_x(3-2x)}{\log_x 7} + \frac{\log_x x^2}{\log_x 7},$$

$$\log_x^2(3-2x) = \log_x(3-2x) + 2. \qquad (27)$$

Из уравнения (27), являющегося следствием уравнения (25), находим $\log_x(3-2x) = 2$, $\log_x(3-2x) = -1$. Если $\log_x(3-2x) = 2$, то $3 - 2x = x^2$, откуда $x_1 = -3$, $x_2 = 1$. Если $\log_a.(3-2x) = -1$, то $3 - 2x = 1/x$, откуда $x_3 = 1$, $x_4 = ½$.. Условиям (26) удовлетворяет только число $x = ½$.□

Пример 2 18. Решить уравнение

$$\log_{1-x}(3-x) = \log_{3-x}(1-x) \qquad (28)$$

Решение. Область допустимых значений уравнения (28) — множество E точек x таких, что $x < 1$, $x \neq 0$, $x < 3$, $x \neq 2$, откуда находим

$$x < 1, x \neq 0. \qquad (29)$$

Применяя формулу $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ и полагая $\log_{1-x}(3-x) = t$, получаем уравнение $t - \dfrac{1}{t} = 0$, $t^2 = 1$, откуда $t_1 = 1$, $t_2 = -1$. Следовательно, на множестве E уравнение (28) равносильно совокупности уравнений $\log_{1-x}(3-x) = 1$, $\log_{1-x}(3-x) = -1$. Первое из них не имеет корней, так как $1 - x \neq 3 - x$. Второе уравнений равносильно на множестве E уравнению $1 - x = \dfrac{1}{3-x}$ или $x^2 - 4x + 2 = 0$, откуда $x_1 = 2 + \sqrt{2}$, $x_2 = 2 - \sqrt{2}$. Из чисел x_1, x_2 только x_2 удовлетворяет условиям (29) и является корнем уравнения (28). □

Пример 2.19. Решить уравнение $x^{\lg x - 1} = 100$.

Решение. Если $x \leq 0$, то наше уравнение не имеет смысла. Пусть $x > 0$. Тогда, логарифмируя обе части уравнения по основанию 10, получим равносильное уравнение $(\lg x - 1)\lg x = 2$. Полагая $\lg x = t$, запишем это уравнение в виде $t^2 - t - 2 = 0$, откуда $t_1 = -1$, $t_2 = 2$. Решив уравнения $\lg x = -1$, $\lg x = 2$, найдем $x_1 = 0{,}1$; $x_2 = 100$. □

Пример 2.20. Решить уравнение

$$15^{\log_5 3} x^{\log_5(45x)} = 1. \qquad (30)$$

Решение. Допустимые значения x определяются условием $x > 0$. Преобразуем левую часть уравнения

$$15^{\log_5 3} x^{\log_5(45x)} = 5^{\log_5 3} 3^{\log_5 3} x^{\log_5(3 \cdot 5 \cdot (3x))} =$$
$$= 3^{\log_5 3+1} x^{\log_5 3 + 1 + \log_5(3x)}.$$

Уравнение (30) равносильно уравнению:

$$(3x)^{\log_5 3+1} x^{\log_5(3x)} = 1 \qquad (31)$$

Логарифмируя уравнение (31) по основанию 5, получаем

$$(1 + \log_5 3)\log_5(3x) + \log_5(3x)\log_5 x = 0,$$

или

$$(1 + \log_5(3x))\log_5(3x) = 0.$$

Если $\log_5(3x) = 0$, то $x = 1/3$, а если $\log_5(3x) = -1$, то $x = 1/15$. □

3. Системы показательных и логарифмических уравнений

При решении систем показательных и логарифмических уравнений применяются методы решения систем алгебраических уравнений, а также методы решения показательных и логарифмических уравнений Специальных способов решения систем показательных и логарифмических уравнений не существует. Поэтому мы просто рассмотрим несколько примеров решения таких систем, в основном для того, чтобы вспомнить методы решения систем алгебраических уравнений.

ПРИМЕР 3 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^x - 4^y = 65, \\ 3^{x/2} - 2^y = 5. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Полагая $3^{x/2} = u$, $2^y = v$, заменим исходную систему алгебраической системой

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = 65, \\ u - v = 5, \end{cases}$$

которая равносильна системе

$$\begin{cases} u + v = 13, \\ u - v = 5, \end{cases}$$

имеющей решение $u = 9$, $v = 4$. Следовательно, $3^{x/2} = 9$, $2^y = 4$, откуда находим $x = 4$, $y = 2$. □

ПРИМЕР 3.2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^x 4^y = 1728, \\ 9^y 2^x = 5832. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Разложим правые части уравнений системы на множители $1728 = 2^6 3^3$, $5832 = 3^6 2^3$. Поэтому исходную систему можно записать в виде

$$\begin{cases} 3^x 4^y = 2^6 3^3, \\ 9^y 2^x = 3^6 2^3. \end{cases}$$

Перемножив, а затем разделив почленно уравнения этой системы, получаем систему

$$\begin{cases} 6^{x+2y} = 6^9, \\ \left(\dfrac{3}{2}\right)^{x-2y} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3}, \end{cases}$$

которая равносильна системе

$$\begin{cases} x + 2y = 9, \\ x - 2y = -3, \end{cases}$$

имеющей единственное решение (3; 3). □

ПРИМЕР 3.3. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} 3^x - 2\cdot 6^x \cdot 2^y + 6\cdot 12^y = 0, \\ 2\cdot 3^y + 4\cdot 6^y \cdot 2^x - 12^x = 0. \end{aligned}$$

РЕШЕНИЕ. Запишем систему в следующем виде:

$$\begin{aligned} 3^x (1 - 2\cdot 2^{x+y}) = -6\cdot 12^y, \\ 2\cdot 3^y (1 + 2\cdot 2^{x+y}) = 12^x. \end{aligned}$$

Перемножив почленно уравнения последней системы, получаем

$$2\cdot 3^{x+y}(1 - 4\cdot 4^{x+y}) = -6\cdot 3^{x+y}\cdot 4^{x+y}$$

или

$$2\cdot 3^{x+y}(1 - 4^{x+y}) = 0.$$

Последнее уравнение, являющееся следствием исходной системы, равносильно уравнению $4^{x+y} = 1$, откуда $x + y = 0$. Подставим $y = -x$ в исходную систему. Тогда каждое из уравнений системы можно записать в виде

$36^x = 6$, откуда $x = 1/2$, $y = -1/2$. □

ПРИМЕР 3 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^{2\log_9(4y^2 - x)} = 1, \\ 2^{(x-y)/2} - 2^{(x-y)/4} = 2. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Используя свойства степени и основное логарифмическое тождество, преобразуем левую часть первого уравнения системы:

$$3^{2\log_9(4y^2 - x)} = 9^{\log_9(4y^2 - x)} = 4y^2 - x.$$

Поэтому первое уравнение равносильно уравнению $4y^2 - x = 1$. Далее преобразуем второе уравнение. Полагая $2^{\frac{x-y}{4}} = t,$ получим уравнение $t^2 - t - 2 = 0$, имеющее корни $t_1 = -1$ и $t_2 = 2$. Так как показательная функция принимает только положительные значения, то второе уравнение равносильно уравнению $2^{\frac{x-y}{4}} = 2$, откуда $x - y = 4$

Таким образом, исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} 4y^2 - x = 1, \\ x - y = 4. \end{cases}$$

Исключив из последней системы x, получим уравнение $y^2 - y - 5 = 0$, откуда $y_1 = -1$, $y_2 = 5/4$. Наконец, находим $x_1 = 3$, $x_2 =$ -р. Решением системы будет пара чисел $(3;-1)$ и $(\frac{21}{4};\frac{5}{4})$ □

Пример 3.5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_3(y+3x) - \log_{27} 8 = \log_3(3-x), \\ 4 + \log_3 \dfrac{y^2}{x^2} = \log_{\sqrt{3}}(9x). \end{cases}$$

Решение. Считая, что $0 < x < 3$, и переходя к логарифмам по основанию 3, заменим исходную систему равносильной ей

$$\begin{cases} \log_3(y+3x) = \log_3(2(3-x)), \\ \log_3 \dfrac{81y^2}{x^2} = \log_3(81x^2). \end{cases}$$

Потенцируя, получаем систему

$$\begin{cases} y + 3x = 2(3-x), \\ y^2 = x^4, \end{cases}$$

являющуюся следствием исходной системы. Из второго уравнения последней системы следует, что либо $y = x^2$, либо $y = -x^2$.

1) Если $y = x^2$, то из первого уравнения системы получаем уравнение $x^2 + 5x - 6 = 0$, откуда $x_1 = -6$, $x_2 = 1$. При $x = -6$ исходная система теряет смысл. При $x = 1$ имеем $y = x^2 = 1$ Пара чисел $(1,1)$ — решение исходной системы.

2) Если $y = -x^2$, то из первого уравнения системы получаем уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$, имеющее корни 2 и 3. При $x = 3$ исходная система теряет смысл. При $x = 2$ имеем $y = -x^2 = -4$. Пара чисел $(2; -4)$ — решение исходной системы. □

Пример 3.6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_y x - \log_2 y^2 = 1, \\ \log_4 x - \log_4 y = 1. \end{cases}.$$

Решение. Система имеет смысл, если $x > 0$, $y > 0$, $y \neq 1$. Из второго уравнения системы следует, что $\log_4 \left(\dfrac{x}{y}\right) = 1$, откуда $x = 4y$. Заменив в первом уравнении системы x на $4y$, получим уравнение

$$\log_y(4y) - \log_2 y^2 = 1$$

с одной переменной. В первом выражении левой части этого уравнения перейдем к основанию 2, второе выражение преобразуем по формуле логарифма степени, учитывая, что $y > 0$, $y \neq 1$. После простых преобразований получим уравнение $\log_2 y^2 = 1$. Отсюда:

1) $\log_2 y = 1$, $y = 2$, и тогда $x = 8$;

2) $\log_2 y = -1$, $y = \dfrac{1}{2}$, а $x = 2$.

Подставляя найденные пары значений $(8;2)$ и $(2;\frac{1}{2})$ в исходную систему, легко проверить, что обе они являются решениями этой системы. □

Пример 3.7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_8(yx) = 3\log_8 x \cdot \log_8 y, \\ 4\log_8 \dfrac{x}{y} = \dfrac{\log_8 x}{\log_8 y}. \end{cases}$$

Решение. Учитывая, что $x > 0$ и $y > 0$, преобразуем левые части уравнений системы по формулам для логарифмов произведения и частного и после введения новых переменных $u = \log_8 x$, $v = \log_8 y$ получаем систему

$$\begin{cases} u+v=3uv, \\ 4(u-v)=\dfrac{u}{v}. \end{cases}$$

Перемножив почленно уравнения этой системы, получим $u^2 = 4v^2$, откуда $u = 2v$ или $u = -2v$. Подставляя $u = 2v$ в последнюю систему, найдем, что $v = \frac{1}{2}$, а значит, $u = 1$. Отсюда $\log_8 x = 1$, $x = 8$; $\log_8 y = \frac{1}{2}$, $y = 2\sqrt{2}$. В случае $u = -2v$ аналогично получим, что $x = \frac{1}{2}$, $y = \sqrt{2}$ Таким образом, исходная система имеет два решения: $(8; 2\sqrt{2})$ и $(\frac{1}{2}, \sqrt{2})$. □

4. Показательные и логарифмические неравенства

4.1. Показательные неравенства

При решении показательных неравенств надо помнить, что показательная функция $y = a^x$ возрастает при а > 1 и убывает при 0 < а < 1 Неравенства вида

$$a^x > b \tag{32}$$

и

$$a^x < b \tag{33}$$

называются *простейшими показательными неравенствами.*

Если $b \le 0$, то неравенство (32) является верным при всех x, а неравенство (33) не имеет решений.

Пусть $b > 0$, тогда:

а) если $a > 1$, то неравенство (32) справедливо при $x > \log_a 6$, а неравенство (33) — при $x < \log_a b$;

б) если 0 < а < 1, то множество решений неравенства (32) — промежуток $(-\infty, \log_a b)$, а множество решений неравенства (33) — промежуток $(\log_a b, +\infty)$.

Неравенство

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \tag{34}$$

при а > 1 равносильно неравенству $f(x) > g(x)$, а в случае, когда $0 < a < 1$, неравенство (34) равносильно неравенству $f(x) < g(x)$.

Решение нестрогих неравенств отличается от решения соответствующих строгих неравенств лишь включением в множество всех решений неравенства также и корней соответствующего уравнения.

Пример 4.1. Решить неравенство $3^{6x^2} \le 729$.

Решение. Заметим, что $729 = 3^6$. Тогда данное неравенство равносильно каждому из следующих неравенств.

$$3^{6x^2} \le 3^6, \qquad 6x^2 \le 6, \qquad x^2 \le 1,$$

откуда $|x| < 1$. □

Пример 4.2. Решить неравенство

$$0{,}25^{2x} > 4 \cdot 0{,}5^{x(x+3)}.$$

Решение. Запишем данное неравенство в виде (34), где $a = 0{,}5$. Получим неравенство

$$0{,}5^{4x} > 0{,}5^{x(x+3)-2},$$

равносильное каждому из следующих неравенств (поскольку основание меньше 1, знак неравенства меняется):

$4x<x(x+3)-2$, $x^2-x-2>0$, $(x+1)(x-2)>0$.

Искомое множество решений — объединение промежутков $(-\infty, -1)$ и $(2, +\infty)$. □

Пример 4.3. Решить неравенство

$$2 \cdot 16^x + 5 \cdot 2^{2x} - 3 > 0.$$

Решение. Полагая $4^x = t$, сведем данное неравенство к квадратному. Получим неравенство

$$2t^2 + 5t - 3 > 0, \text{ или } 2(t-\frac{1}{2})(t+3) > 0,$$

где $t = 4^x > 0$. Поэтому квадратное неравенство равносильно неравенству $(t-\frac{1}{2}) > 0$. Итак, $t > \frac{1}{2}$ или $4^x > \frac{1}{2}$ или $4^x > 4^{-1/2}$, откуда $x > -\frac{1}{2}$. □

Пример 4 4. Решить неравенство

$$2 \cdot 4^x \geq 6^x + 3 \cdot 9^x.$$

РЕШЕНИЕ. Разделив обе части данного неравенства на 9^x и полагая $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x >$ получим неравенство

$$2t^2 - t - 3 > 0, \text{ или } 2\left(t - \frac{3}{2}\right)(t+1) \geq 0,$$

откуда $t \geq \frac{3}{2}$, так как $t > 0$. Значит, исходное неравенство равносильно неравенству $\left(\frac{2}{3}\right)^x \geq \frac{3}{2}$, откуда $x \leq -1$. □

ПРИМЕР 4.5. Решить неравенство

$$7 \cdot 49^{-x^2/2} \leq \frac{1}{49} \cdot 7^{\left|x^2+5x\right|}.$$

РЕШЕНИЕ. Данное неравенство равносильно каждому из следующих неравенств:

$$7^{1-x^2} \leq 7^{\left|x^2+5x\right|-2},$$

$$\left|x^2+5x\right| + x^2 - 3 \geq 0. \tag{35}$$

Избавимся от модуля.

1) Если $x \in (-\infty,-5]$ U $[0,+\infty)$, то $x^2 + 5x > 0$ и неравенство (35)равносильно каждому из неравенств

$$2x^2 + 5x - 3 > 0, \ (x+3)\left(x - \frac{1}{2}\right) \geq 0,$$

откуда следует, что либо $x \leq -3$, либо $x \geq \frac{1}{2}$. В этом случае решениями неравенства (35) являются все числа x такие, что $x \leq -5$, а также все числа x из промежутка $[\frac{1}{2}, +\infty)$.

2) Если $x \in (-5, 0)$, то $|x^2+5x| = -x^2 - 5x$ и неравенство (35) примет вид $-5x - 3 \geq 0$, откуда $x \leq -\frac{3}{5}$. В этом случае множество решений неравенства (35) — промежуток $(-5, -\frac{3}{5}]$.

Таким образом, множество всех решений исходного неравенства — объединение промежутков $(-\infty,-\frac{3}{5}]$ U $[\frac{1}{2}, +\infty)$. □

При использовании для решения неравенств метода интервалов полезно запомнить следующую рекомендацию:

Выражение $a^b - a^c$ при $a > 1$ имеет тот же знак, что $(b - c)$, и противоположный, если $0 < a < 1$. Оба варианта можно объединить в один: выражения $a^b - a^c$ и $(a - 1)(b - c)$ имеют один знак. При этом необходимо помнить, что $a > 0$ и $a \neq 1$.

ПРИМЕР 4.6. Решить неравенство

$$\left(\frac{4x^2}{x^4+1}\right)^{3x^2-x} > \left(\frac{x^4+1}{4x^2}\right)^{x-2}.$$

РЕШЕНИЕ. Имеем $\left(\frac{x^4+1}{4x^2}\right)^{x-2} - \left(\frac{x^4+1}{4x^2}\right)^{-3x^2+x} < 0$. Левую часть неравенства заменим на $\left(\frac{x^4+1}{4x^2} - 1\right)(x-2-(-3x^2+x))$.

Получаем $(x^4 - 4x^2 + 1)(3x^2 - 2) < 0$ (не забудем и про условие $x \neq 0$). Последнее неравенство решается методом интервалов. В результате получим объединение промежутков

$$\left(-\sqrt{2+\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cup \left(-\sqrt{2-\sqrt{3}}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt{2-\sqrt{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{2+\sqrt{3}}\right). □$$

4.2. Логарифмические неравенства

Вначале рассмотрим логарифмические неравенства с постоянными основаниями. При решении логарифмических неравенств будем пользоваться свойствами логарифмической функции.

Простейшие логарифмические неравенства

$$\log_a x > b \tag{36}$$

$$\log_a x < b \tag{37}$$

имеют решения при любом действительном b.

Если $a > 1$, то неравенство (36) справедливо при $x > a^b$, а неравенство (37) является верным при $0 < x < a^b$.

Если $0 < a < 1$, то неравенство (36) справедливо при $0 < x < a^b$, а неравенство (37) является верным при $x > a^b$.

Неравенство

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \qquad (38)$$

при $a > 1$ равносильно двойному неравенству

$$f(x) > g(x) > 0,$$

а при $0 < a < 1$ неравенство (38) равносильно неравенству

$$0 < f(x) < g(x).$$

Пример 4.7. Решить неравенство $\log_3(x-2) > 2$.

Решение. Запишем данное неравенство в виде

$$\log_3(x-2) > \log_3 9$$

и воспользуемся тем, что логарифмическая функция с основанием, большим единицы, является возрастающей. Получим $x - 2 > 9$, откуда $x > 11$. □

Пример 4.8. Решить неравенство $\log_{1/3}(x+1) \le -3$.

Решение. Так как $-3 = \log_{1/3} 27$, а логарифмическая функция с основанием, меньшим единицы, является убывающей, то данное неравенство равносильно неравенству $x + 1 > 27$, откуда $x > 26$. □

Пример 4.9. Решить неравенство

$$(3 - x) < \log_5(20 + 5^x).$$

Решение. Данное неравенство равносильно каждому из следующих неравенств:

$$\log_5 5^{3-x} < \log_5(20 + 5^x), \qquad 5^{3-x} < 20 + 5^x,$$

$$5^{2x} + 20 \bullet 5^x - 125 > 0, (5^x - 5)(5^x + 25) > 0, 5^x > 5,$$

откуда $x > 1$. □

Пример 4.10. Решить неравенство $\log_2(x^2 - x) < 1$.

Решение. Данное неравенство, записанное в виде

$$\log_2(x^2 - x) < \log_2 2,$$

равносильно двойному неравенству $0 < x^2 - x < 2$. (Здесь мы учли ОДЗ

неравенства.) Множество E решений неравенства $x^2 - x > 0$ представляет собой объединение промежутков $x < 0$ и $x > 1$, а множество решений неравенства $x^2 - x < 2$, равносильного неравенству $(x-2)(x+1) < 0$, — интервал $E_2 = (-1,2)$.

Множество E решений исходного неравенства — это пересечение множеств E_1 и E_2. Следовательно, $E = (-1,0)$ U $(1, 2)$. □

Пример 4.11. Решить неравенство

$$\log_3 x + \log_3(x+2) > 1. \qquad (39)$$

Решение. Так как $1 = \log_3 3$, то, заменив сумму логарифмов на логарифм произведения, получим неравенство

$$\log_3[x(x+2)] > \log_3 3 \qquad (40)$$

которое не равносильно неравенству (39). Действительно, в неравенстве (39) левая часть определена при $x > 0$, а в неравенстве (40) — при и $x < -2$. Таким образом, при переходе от (39) к (40) область определения неравенства расширилась. Неравенства (39) и (40) равносильны, если

$$x > 0. \qquad (41)$$

Из (40) следует, что

$$x(x+2) > 3, \qquad (42)$$

а исходное неравенство (39) равносильно системе (41), (42). Неравенство (42) равносильно неравенству

$$(x+3)(x-1) > 0,$$

а система (41). (42) равносильна неравенству $x > 1$. □

Пример 4.12. Решить неравенство

$$\log_2 \log_{0,5}\left(2^x - \frac{15}{16}\right) < 2.$$

Решение. Так как $2 = \log_2 4$, то исходное неравенство равносильно двойному неравенству

$$0 < \log_{0;5}\left(2^x - \frac{15}{16}\right) < 4.$$

В этом неравенстве уже учтены все условия, налагаемые ОДЗ неравенства. Это двойное неравенство в свою очередь равносильно двойному неравенству

$$1 > \left(2^x - \frac{15}{16}\right) > 0{,}5^4 .$$

Здесь мы учли, что основание логарифма меньше единицы. Преобразуя последнее неравенство, получаем $\frac{31}{16} > 2^x \ge 1$, откуда $\log_2 31 - 4 > x > 0$. □

Если в неравенстве встречается логарифмическая функция, содержащая неизвестное в основании, то обычно рассматривают два случая: основание больше 1 и основание меньше 1 (но больше нуля).

ПРИМЕР 4.13. Решить неравенство $\log_{4x^2}(5x + 6) > 1$

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим два случая:

1) $4x^2 > 1$. Тогда при потенцировании знак неравенства сохраняется и исходное неравенство равносильно неравенству $5x + 6 > 4x^2$. Решая систему из двух неравенств, находим

$$-\frac{3}{4} < x < -\frac{1}{2}; \qquad \frac{1}{2} < x < 2 ;$$

2) $0 < 4x^2 < 1$. Тогда $5x + 6 < 4x^2$ (знак неравенства меняется).

К этим двум неравенствам следует добавить еще одно $5x + 6 > 0$ (область определения). Полученная система неравенств несовместна. □

Часто при решении неравенств, содержащих неизвестное в основании, удобно перейти к числовому основанию.

ПРИМЕР 4.14. Решить неравенство $2 \log_5 x - \log_x 125 < 1$.

РЕШЕНИЕ. Произведем следующие очевидные преобразования:

$$2 \log_5 x - 3 \log_x 5 < 1; \qquad 2 \log_5 x - 3\,\frac{1}{\log_5 x} < 1$$

Введем новую переменную $t = \log_5 x$ Исходное неравенство запишется в виде

$$2t - \frac{3}{t} - 1 < 0, \qquad \text{или} \qquad \frac{2t^2 - t - 3}{t} < 0 .$$

Решая последнее неравенство методом интервалов, получим $t < -1$ или

$0 < t < \frac{3}{2}$ Возвращаясь к исходной переменной, находим $x \in (0, \frac{1}{5})$ $\text{U}(1; \sqrt{125})$. □

Приведенные способы решения логарифмических неравенств, содержащих неизвестное в основании логарифма, можно дополнить еще одной полезной рекомендацией.

Выражения $\log_a b$ и $(a - 1)(b - 1)$ имеют один знак. Правда, формальная замена выражения $\log_o b$ выражением $(a - 1)(b - 1)$ приводит к расширению области определения. Чтобы не возникало проблем, необходимо находить ОДЗ неравенства

ПРИМЕР 4.15. Решить неравенство

$$\frac{\log_{2x}(5x-1)\log_{3x}(7x-1)}{2^{15x^2+2} - 2^{11x}} \ge 0 .$$

РЕШЕНИЕ. Заменяя каждый множитель на выражение того же знака, приходим к неравенству

$$\frac{(2x-1)(5x-2)(3x-1)(7x-2)}{15x^2 + 2 - 11x} \ge 0$$

при условии $x > \frac{1}{5}$, $x \ne \frac{1}{2}$, $x \ne \frac{1}{3}$ (ОДЗ неравенства). Разложив на множители знаменатель, получим неравенство

$$\frac{(2x-1)(5x-2)(3x-1)(7x-2)}{(5x-2)(3x-1)} \ge 0$$

которое имеет решение

$$\left(-\infty; \frac{2}{7}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

Учитывая ОДЗ неравенства, окончательно получим

$$\left(\frac{1}{5}; \frac{2}{7}\right] \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

5. Нестандартные задачи

В заключение мы рассмотрим некоторые задачи, имеющие нестандартную формулировку или требующие нестандартного решения.

Многие задачи повышенной трудности могут быть успешно решены с помощью оценок левой и правой частей, входящих в уравнения или неравенства. Признаком таких задач может быть наличие в них функций различной природы, например тригонометрических и показательных, или количество неизвестных, большее количества уравнений (неравенств).

Применение метода оценок требует умения находить наибольшие и наименьшие значения элементарных функций или их композиций на заданном множестве, а также знания некоторых неравенств:

1. Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим положительных чисел

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}.$$

Равенство достигается при $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

2. Сумма синуса и косинуса одного и того же аргумента

$$|a \sin x + b \cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}.$$

3. Сумма взаимно-обратных чисел

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

при $x > 0$, равенство достигается при $x = 1$;

$$x + \frac{1}{x} \leq -2$$

при $x < 0$, равенство достигается при $x = -1$.

Пример 5.1. Решить уравнение

$$2^{-\cos x} = \log_{\pi} x + \log_x \pi.$$

Решение. Так как $|\cos x| \leq 1$, то левая часть уравнения $2^{-\cos x}$ принимает значения от $\frac{1}{2}$ до 2. Правая часть

$$\log_{\pi} x + \log_x \pi = \log_x \pi + \frac{1}{\log_{\pi} x}$$

по модулю больше или равняется 2 (в силу неравенства для суммы двух взаимно обратных чисел). Следовательно, уравнение имеет решения, если и только если одновременно выполнены два условия:

$$\begin{cases} 2^{-\cos x} = 2, \\ \log_{\pi} x + \log_x \pi = 2. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $x = \pi$. □

Решение уравнений и неравенств с использованием свойств монотонности основано на следующих утверждениях:

1. Пусть *f(x)* —непрерывная и строго монотонная функция на некотором промежутке. Тогда уравнение *f(x)* = *с* может иметь не более одного решения на этом промежутке.

2. Пусть *f(x)* и *g(x)* — непрерывные на некотором промежутке функции, причем *f(x)* строго возрастает, а *g(x)* строго убывает. Тогда уравнение *f(x)* = *g(x)* может иметь не более одного решения на этом промежутке.

Пример 5.2. Решить уравнение

$$\lg(\cos x - 0{,}5) + \lg(\sin x - 0{,}3) + 1 = 0.$$

Решение. Уравнение имеет смысл для *x,* удовлетворяющих условиям:

$$\cos x > 0{,}5;\ \sin x > 0{,}3.$$

Заменяя сумму логарифмов логарифмом произведения, получим уравнение

$$\lg [(\cos x - 0{,}5)(\sin x - 0{,}3)] = -1,$$

являющееся следствием исходного уравнения. Заменяя правую часть уравнения выражением $\lg\frac{1}{10}$, а затем, потенцируя, получим

$$(\cos x - 0{,}5)(\sin x - 0{,}3) = \frac{1}{10}.$$

Поскольку сомножители в левой части положительны, то из неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим следует

$$(\cos x - 0{,}5)(\sin x - 0{,}3) \leq \left(\frac{\cos x + \sin x - 0{,}8}{2}\right)^2 \leq$$

$$\le\left(\frac{\sqrt{2}-0{,}8}{2}\right)^2<\left(\frac{1{,}42-0{,}8}{2}\right)^2=(0{,}31)^2<0{,}1$$

Так как левая часть уравнения меньше правой уравнение не имеет решений. □

ПРИМЕР 5.3. Решить уравнение $4^x + (x-1)2^x = 6 - 2x$.

РЕШЕНИЕ. Обозначим $2^x = y$. Тогда исходное уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} y^2+(x-1)y=6-2x, \\ y=2^x. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения системы переменную y через x. Для этого решим его как квадратное относительно y. В результате получим $y_1 = -2$ (посторонний корень) или $_2 = 3 - x$.

Итак, $2^x = 3 - x$. В левой части уравнения расположена возрастающая функция, а в правой — убывающая. Очевидно, что $x = 1$ — решение, а других решений быть не может. □

ПРИМЕР 5.4. Найти все значения параметра a, при которых существует единственная пара (x,y), удовлетворяющая уравнению

$$2^{\frac{1}{2}a+1}x^2-x^4=y^2-2\sqrt{a}\,y+6.$$

РЕШЕНИЕ. Преобразуем правую и левую части уравнения (выделим полные квадраты):

$$y^2-2\sqrt{a}\,y+6=(y-\sqrt{a})^2+6-a;$$

$$2^{\frac{1}{2}a+1}x^2-x^4=-\left(x^2-2^{\frac{1}{2}a}\right)^2+2^a.$$

Заметим, что функция (от x), расположенная в левой части уравнения, ограничена сверху и принимает наибольшее значение 2^a. В правой части равенства расположена функция (от y), наименьшее значение

которой равно $6 - a$.

Понятно, что для существования единственной пары (x,y), удовлетворяющей данному уравнению, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $2^a = 6 - a$, откуда $a = 2$ (слева функция возрастает, справа — убывает). □

Литература

[1] *Пособие по математике для поступающих в вузы*/ под ред. Г.Н.Яковлева. — М.: Наука, 1982.

[2] Шарыгин И.Ф., Голубев В.И. *Факультативный курс по математике: Решение задач: Учебн. пособие для 11 кл. сред. шк.* — М.: Просвещение, 1991.

[3] Черкасов О.Ю., Якушев А.Г. *Математика: интенсивный курс подготовки к экзамену.* — М.: Рольф, 1997.

[4] Шавунин М.И. *Математика для поступающих в вузы. Уравнения и системы уравнений.* — М.: Аквариум, 1997.

[5] Шабунин М.И. *Математика для поступающих в вузы. Неравенства и системы неравенств.* — М.: Аквариум, 1997.

Учебное издание

Математика: Показательная и логарифмическая функции.
Решение уравнений и неравенств
Модуль № 4 для 11 класса
Учебно-методическая часть

Составитель: Анатолий Михайлович Быковских

Редактор: О.Ф.Александрова
Корректура автора

Подписано в печать 25.12.2006. Формат 60x84/16.
Бумага газетная. Печать ризографическая.
Усл. печ. л. 2,3.

Тиражируется на электронных носителях
Адрес в Internet: zensh.ru/resourses

Отдел информационных ресурсов управления информатизации КрасГУ
660041 г. Красноярск, пр. Свободный, 79, ауд. 22-05, e-mail: info@lan.krasu.ru

Издательский центр Красноярского государственного университета
660041 г. Красноярск, пр. Свободный, 79, e-mail: rio@lan.krasu.ru